fipmeca

Jean-Michel BAËS
13, route sablée 92370 Chaville

☎ 01 47 50 86 46
06 74 79 66 46
jmbaes@free.fr

ANALYSE NUMERIQUE

Formation : FIP MECA

Le 20 MAI 2003

Cédric PINARD
98-100 av du Général de Gaulle,
94500 Champigny s/ Marne

☎

PROJET :

calcul par la méthode des différences finies,

des températures et déplacements des points d'une barre de section constante, ayant comme contraintes :

- A l'extrémité gauche une température
- A l'extrémité droite un flux
- Une température ambiante

Par Jean-Michel BAËS et Cédric PINARD

sujet proposé et suivi par Isabelle BRUANT et Isabelle DARBORD.

Institut des Techniques d'Ingénieur de l'Industrie
ILE DE FRANCE

fipmeca
PST, 1 chemin Desvallières 92410 Ville d'Avray
Contact : pierre.gilbertas@u-paris10.fr Tél secrétariat : 01 47 09 70 20

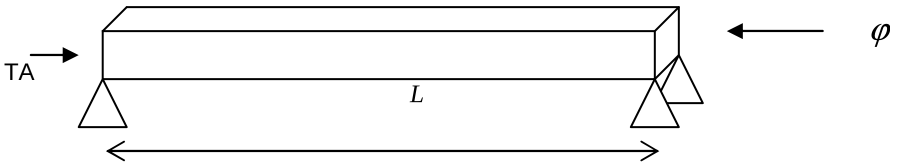
SOMMAIRE

1. Enoncé du problème

FIP

Projet Numérique

Calcul du champ de température et de déplacement sur une barre de section uniforme soumise à une différence de température à ses extrémités :



Conditions aux limites mécaniques : rotule en x=L et appui simple en x=0.

La barre de duralumin se refroidissant par convection, l'équation de la chaleur qui détermine la température à l'état stationnaire est une équation différentielle :

$$-k\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{hP}{S}(T-T_0)=0 \qquad 0\le x\le L$$

$$T(0)=T_A \qquad\qquad -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_L=\varphi$$

Où k est le coefficient de conductivité thermique, h est le coefficient de perte de chaleur par convection, P le périmètre de la barre (supposée ici de section S indépendante de x) et To est la température ambiante. Dans la suite, on considère $x_1 = 0$ et $x_{n+1} = L$.

Résoudre numériquement par la méthode des différences finies l'équation de la chaleur.

Le champ de température induit un déplacement longitudinal u le long de la poutre. L'équation différentielle vérifiée par le déplacement est

$$ES\frac{d^2u}{dx^2}-\alpha S\frac{dT}{dx}=0$$

$$\frac{du}{dx}(x=0)=0 \qquad u(x=L)=0$$

E est le module d'Young, S la section et a le coefficient de dilatation.

Résoudre par la méthode des différences finies l'équation en déplacement (connaissant la température en chacun des points de la poutre).

Données : on utilisera par exemple le duralumin

Masse volumique à 20°C (kg.m-3)	2703
Coefficient d'échange (W.m-2.K-l)	5
Conductivité thermique à 20°C (W.m-1.K-1)	222
Module d'élasticité (MPa)	68000
Coefficient de Poisson	0,34
Coefficient de dilatation linéique à 20°C (K-1)	23.10-6
Section de la poutre (mm*mm)	5*5
Longueur de la poutre (mm)	200

proposés par : I. Bruant et I. Darbord (01 47 09 45 32 et 01 47 09 45 58)

Nous allons traiter le problème par :

<u>- la méthode Analytique :</u>

Etant donné que les équations de température et déplacement sont des équations différentielles et que nous connaissons les conditions aux limites, nous allons ainsi calculer de manière analytique :
- L'équation de température en fonction de la position
- L'équation de déplacement en fonction de la position

Ces équations devant nous donner les valeurs « vraies », nous pourrons ainsi calculer les erreurs obtenues avec les méthodes numériques utilisées.

<u>- les méthodes des différences finies :</u>

Nous savons grâce à la méthode des différences finies exprimer une dérivée 1er ou 2eme.
Nous utiliserons :
- la méthode des différences finies centrée
- la méthode des différences finies gauche
- la méthode des différences finies droite

Nous verrons qu'en un point Xi, en appliquant à l'équation différentielle les différences finies on obtient une équation à 3 inconnues de températures.
En appliquant aux autres points de la barre on obtiendra donc un système d'équations dans lequel on aura intégré les conditions aux limites.

Par exemple pour la matrice de Température Y, nous représenterons le système par l'écriture matricielle M.Y=X

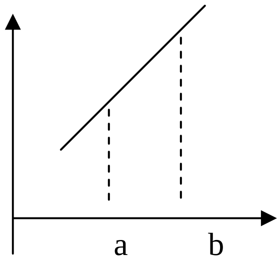
Et pour trouver le vecteur champ de températures il suffira de calculer Y=X/M

Nous afficherons les courbes de températures ou déplacements obtenues :

- Par calcul analytique
- Par la méthode des différences finies centrée
- Par la méthode des différences finies gauche
- Par la méthode des différences finies droite

Enfin nous calculerons les erreurs relatives en faisant varier les différents paramètres (TA, fi, To, L…) afin d'essayer de comprendre quelle méthode est la plus précise.

2. Méthode des différences finies



Rappel de la formule de Taylor :

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a) \bullet f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \bullet f''(a) \ldots\ldots\ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \bullet f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} \bullet f^n(c)}$$

avec a < c < b

b - a = H, H étant le pas de discrétisation

Formule de Taylor simplifié : $\boxed{f(b) = f(a) + (b-a) \bullet f'}$

$O_3 \bullet H^2$ étant l'erreur, ou le manque de l'addition des dérivées d'ordre supérieur.

Dérivée à droite (ou avant):

$f(x_i + H) = f(x_i) + (x_i + H - x_i) \bullet f'$ d'où dérivée première :

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_i + H) - f(x_i)}{H}}$$

Dérivée seconde à droite (ou avant) :

posons *f' = F alors f''=F'*

$$F'(x_i) = \frac{f'(x_i + H) - f'(x_i)}{H}$$

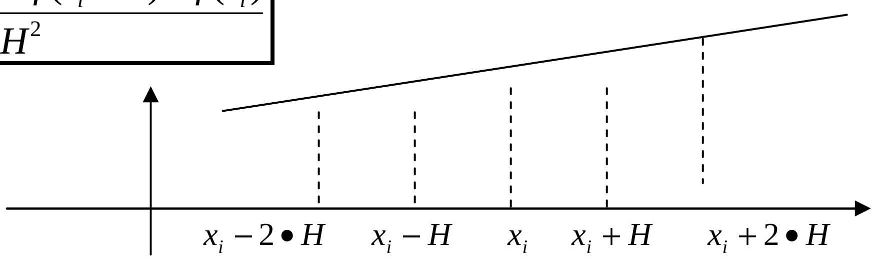
pour $x_i + H$ dérivée avant : $f'(x_i + H) = \dfrac{f(x_i + 2 \bullet H) - f(x_i + H)}{H}$

pour x_i dérivée avant : $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i + H) - f(x_i)}{H}$

d'où :

$$f''(x_i) = \frac{\dfrac{f(x_i + 2 \bullet H) - f(x_i + H)}{H} - \dfrac{f(x_i + H) - f'(x_i)}{H}}{H} = \frac{f(x_i + 2 \bullet H) - 2 \bullet f(x_i + H) + f(x_i)}{H^2}$$

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f(x_i + 2 \bullet H) - 2 \bullet f(x_i + H) + f(x_i)}{H^2}}$$



Dérivée arrière (ou gauche):

$f(x_i) = f(x_i - H) + (x_i - (x_i - H) \bullet f'$ d'où dérivée première :

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - H)}{H}}$$

Dérivée seconde arrière (ou gauche):

posons *f' = F alors f''=F'*

$$F'(x_i) = \frac{f'(x_i) - f'(x_i - H)}{H}$$

pour $x_i - H$ dérivée arrière : $f'(x_i - H) = \dfrac{f(x_i - H) - f(x_i - 2 \bullet H)}{H}$

pour x_i dérivée arrière : $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_i - H)}{H}$

d'où :

$$f''(x_i) = \frac{\dfrac{f(x_i) - f(x_i - H)}{H} - \dfrac{f(x_i - H) - f(x_i - 2 \bullet H)}{H}}{H} = \frac{f(x_i - 2 \bullet H) - 2 \bullet f(x_i - H) + 2 \bullet f(x_i)}{H^2}$$

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2 \bullet H) - 2 \bullet f(x_i - H) + f(x_i)}{H^2}}$$

Dérivée centrée:

$f(x_i + \frac{H}{2}) = f(x_i - \frac{H}{2}) + (x_i + \frac{H}{2} - (x_i - \frac{H}{2}) \bullet f'$ d'où dérivée première :

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_i + \frac{H}{2}) - f(x_i - \frac{H}{2})}{H}}$$

Dérivée seconde centré :

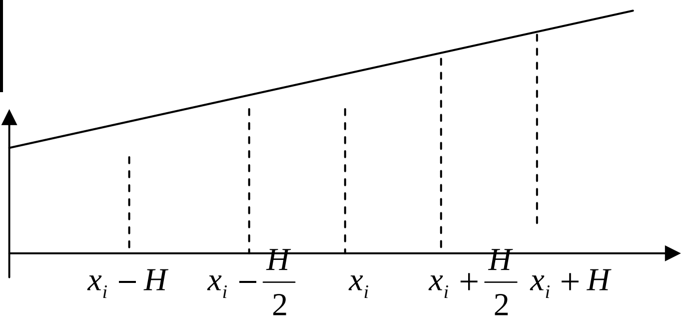
posons *f' = F d'où* $f''(x_i) = F'(x_i) = \dfrac{f'(x_i + \frac{H}{2}) - f'(x_i - \frac{H}{2})}{H}$

pour $x_i + \dfrac{H}{2}$ dérivée centrée : $f'(x_i + \frac{H}{2}) = \dfrac{f(x_i + H) - f(x_i)}{H}$

pour $x_i - \dfrac{H}{2}$ dérivée centrée : $f'(x_i - \frac{H}{2}) = \dfrac{f(x_i) - f(x_i - H)}{H}$

on a donc : $f''(x_i) = \dfrac{\dfrac{f(x_i + H) - f(x_i)}{H} - \dfrac{f(x_i) - f(x_i - H)}{H}}{H}$

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f(x_i + H) - 2 \bullet f(x_i) - f(x_i - H)}{H^2}}$$



3. Calcul du champ de température en fonction de la position

3.1 résolution analytique des températures en fonction des déplacements

L'équation différentielle de la température à l'état stationnaire est: $-k \bullet \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{h \bullet P}{S} \bullet T = \frac{h \bullet P}{S} \bullet T_0$

C'est donc un équation différentielle du type : **a.y''+b.y'+c .y = d**

avec a = $-k$, b = 0 , c = $\frac{h \bullet P}{S}$, d = $\frac{h \bullet P \bullet T_0}{S}$

<u>- Résolution de l'équation sans second membre (ESSM) : a.y''+b.y'+c .y = 0</u>

trouvons les solutions de l'équation caractéristique : $a \bullet r^2 + b \bullet r + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ on a donc $\Delta = 4 \bullet k \bullet \frac{h \bullet P}{S}$ $\Rightarrow$ $\Delta > 0$

2 racines réelles : $\left. \begin{array}{l} r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \bullet a} \\ b = 0 \end{array} \right\}$ $\Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a}$ $r_2 = \frac{-\sqrt{-a \bullet c}}{a} = -r_1$

$Z_1 = e^{r_1 \bullet x}$ $Z_2 = e^{r_2 \bullet x}$

La solution de l'équation sans second membre est: $\boxed{\text{YESSM} = K_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + K_2 \bullet e^{r_2 \bullet x}}$

<u>- Recherche d'une solution particulière:</u>

Le second membre de l'équation : $\frac{h \bullet P}{S} \bullet T_0$ est une constante, la solution particulière est donc du même type. Et $y'_p = y''_p = 0$

Reporté dans l'équation différentielle on a:

$(c \bullet)$ $y_p = d$

$(b \bullet)$ (=0) $y'_p = 0$

$(a \bullet)$ (=-k) $y''_p = 0$ on a donc $\overbrace{a \bullet y'' + b \bullet y'}^{0} + c \bullet y = d$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_p = \frac{d}{c} = T_0}$

<u>-Solution générale de l'équation différentielle :</u> YG=YESSM+Yp

$$\boxed{\text{YG} = K_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + K_2 \bullet e^{r_2 \bullet x} + To}$$

<u>Déterminons K1 et K2 avec les conditions aux limites :</u>

<u>En x = 0 on a :</u> T(0) = TA : $\Rightarrow$ YG(o)= $K_1 + K_2 + T_0 = TA$ $\Rightarrow K_1 + K_2 = TA - T_0$

<u>En x=L on a :</u> $-k \bullet \frac{\partial T}{\partial x} = \varphi$:

quand x = L : $-k \bullet [K_1 \bullet e^{\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet x} + K_2 \bullet e^{-\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet x} + \frac{d}{c}]' = -k \bullet \frac{\partial T}{\partial x} = \varphi$

$$\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet (K_1 \bullet e^{\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet L} - K_2 \bullet e^{-\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet L}) = \frac{\varphi}{-k}$$

$$(K_1 \bullet e^{\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet L} - K_2 \bullet e^{-\frac{\sqrt{-a \bullet c}}{a} \bullet L}) = \frac{\varphi \bullet a}{-k \bullet \sqrt{-a \bullet c}} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -k \\ c = \frac{h \bullet P}{S} \\ x = L \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(K_1 \bullet e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} - K_2 \bullet e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L}) = +\dfrac{\varphi}{\sqrt{k\bullet\dfrac{h\bullet P}{S}}} = +\varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}} \\ K_1 + K_2 = TA - T_0 \Rightarrow K_1 = TA - T_0 - K_2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$((TA - T_0 - K_2)_1 \bullet e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} - K_2 \bullet e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L}) = +\varphi\bullet\sqrt{\frac{S}{h\bullet P\bullet k}}$$

$$K_2 \bullet (e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L}) = (TA - T_0)\bullet e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + \varphi\bullet\sqrt{\frac{S}{h\bullet P\bullet k}}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{(TA - T_0)\bullet e^{r_1\bullet L} - \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{r_1\bullet L} + e^{-r_1\bullet L})}}$$

$$K_1 = TA - T_0 - \frac{(TA - T_0)\bullet e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} - \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})} =$$

$$\frac{TA\bullet(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L}) - T_0\bullet(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})}{(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})} - \frac{(TA - T_0)\bullet e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} - \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})} =$$

$$\frac{TA\bullet e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} - T_0\bullet e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L}}{(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})} + \frac{\varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})} = \frac{(TA - T_0)\bullet e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L} + e^{-\frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a}\bullet L})}$$

$$\boxed{K_1 = \frac{(TA - T_0)\bullet e^{-r_1\bullet L} + \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{r_1\bullet L} + e^{-r_1\bullet L})}}$$

$$\frac{d}{c} = \mathrm{T}_0 \qquad r_1 = \frac{\sqrt{-a\bullet c}}{a} \qquad r_2 = \frac{-\sqrt{-a\bullet c}}{a}$$

Solution Analytique des temperatures:

$$\boxed{\mathrm{TG(x)} = \frac{(TA - T_0)\bullet e^{-r_1\bullet L} + \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{r_1\bullet L} + e^{-r_1\bullet L})}\bullet e^{r_1\bullet x} + \frac{(TA - T_0)\bullet e^{r_1\bullet L} - \varphi\bullet\sqrt{\dfrac{S}{h\bullet P\bullet k}}}{(e^{r_1\bullet L} + e^{-r_1\bullet L})}\bullet e^{-r_1\bullet x} + T_0}$$

$$\boxed{\mathrm{YG} = K_1\bullet e^{r_1\bullet x} + K_2\bullet e^{-r_1\bullet x} + \mathrm{To}}$$

3.2 résolution par la méthode des différences finies centrée

On a l' équation de la chaleur à l'état stationnaire: $-k\dfrac{d^2T}{dx^2}+\dfrac{hP}{S}(T-T_0)=0$ $\quad -k\bullet y''+\dfrac{hP}{S}\bullet(y-y_0)=0$

En un point xi, la dérivée centrée seconde s'écrit : $y''=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_i=\dfrac{f(x_i+H)-2f(x_i)+f(x_i-H)}{H^2}$

Intégrée dans l'équation on a : $-k[\dfrac{T(x_i+H)-2\bullet T(x_i)+T(x_i-H)}{H^2}]+\dfrac{h\bullet P}{S}\bullet T(x_i)-\dfrac{h\bullet P}{S}\bullet T_0=0$

$$\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}\bullet T(x_i+H)+\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}\bullet T(x_i-H)-(\frac{2\bullet k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}+1)\bullet T(x_i)=-T_0$$

en considérant les constantes suivantes : $Co=\dfrac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}$ et CoT = -(2 • Co + 1)

<u>On obtient au point $x_{(i)}$ l'équation :</u> $Co\bullet T(x_i-H)+CoT\bullet T(x_i)+Co\bullet T(x_i+H)=-T_0$

En appliquant aux autres points on a le système suivant :

$x_{(2)}\Rightarrow \quad Co\bullet T1+CoT\bullet T2+Co\bullet T3=-T_0$

$x_{(3)}\Rightarrow \quad Co\bullet T2+CoT\bullet T3+Co\bullet T4=-T_0$

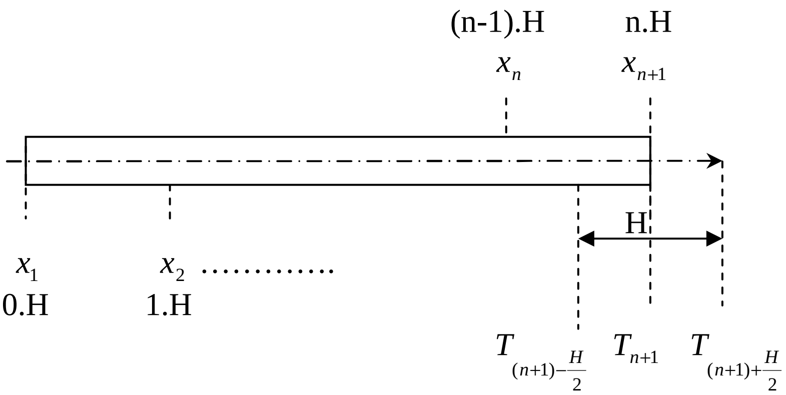
$\vdots$

$x_{(n-1)}\Rightarrow \quad Co\bullet T(n-2)+CoT\bullet T(n-1)+Co\bullet T(n)=-T_0$

$x_{(n)}\Rightarrow \quad Co\bullet T(n-1)+CoT\bullet T(n)+Co\bullet T(n+1)=-T_0$

<u>-Conditions aux limites :</u>

en $x_{(1)}\Rightarrow T_1=TA$



en $x_{(n+1)}\Rightarrow -k\bullet\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_L=\varphi$ $\qquad \dfrac{-k\bullet[T(L+\frac{H}{2})-T(L-\frac{H}{2})]}{H}=\varphi$ avec la dérivée centrée

Mais le point en L+H/2 n'existant pas, on suppose que la dérivée au point (n +1) - $\dfrac{H}{2}$ est égale à la dérivée point (n +1)

T(L - $\dfrac{H}{2}$) = T(L) d'où : $\qquad \varphi=\dfrac{-k\bullet[T(n+1)-T(n)]}{H}$

On obtient donc : $\boxed{T(n+1)=T(n)-\dfrac{\varphi\bullet H}{k}}$ **mais** ce résultat ne tient pas compte des pertes d'énergie dues à l'échange thermique avec la température ambiante To entre Tn+1 et T(n+1) - $\dfrac{H}{2}$:

En considérant ces pertes on considère l'équation :

$$\varphi\bullet So=-k\bullet So\bullet\frac{T(n+1)-T(n)}{H}\overbrace{-h\bullet P\bullet\frac{H}{2}\bullet[\frac{1}{2}\bullet((T(n+1)+T(n))-To]}^{\text{pertes}}$$

$$\varphi\bullet So+h\bullet P\bullet H\bullet\frac{1}{4}\bullet T(n)-h\bullet P\bullet\frac{H}{2}\bullet To=-\frac{k\bullet So}{H}\bullet[T(n+1)-T(n)]-h\bullet P\bullet\frac{H}{4}\bullet(T(n+1))$$

$$\varphi \bullet So + h \bullet P \bullet H \bullet \frac{1}{4} \bullet T(n) - h \bullet P \bullet \frac{H}{2} \bullet To - \frac{k \bullet So}{H} \bullet T(n) = -\frac{k \bullet So}{H} \bullet T(n+1) - h \bullet P \bullet \frac{H}{4} \bullet (T(n+1))$$

$$\varphi \bullet So + h \bullet P \bullet H \bullet \frac{1}{4} \bullet T(n) - h \bullet P \bullet \frac{H}{2} \bullet To - \frac{k \bullet So}{H} \bullet T(n) = -[\frac{k \bullet So}{H} + h \bullet P \bullet \frac{H}{4}] \bullet (T(n+1))$$

$$-\frac{\varphi \bullet So + [\frac{h \bullet P \bullet H}{4} - \frac{k \bullet So}{H}] \bullet T(n) - (h \bullet P \bullet \frac{H}{2} \bullet To)}{[\frac{k \bullet So}{H} + \frac{h \bullet P \bullet H}{4}]} = (T(n+1))$$

En posant :

$$\boxed{Ko = \frac{[\frac{h \bullet P \bullet H}{4} - \frac{k \bullet So}{H}])}{[\frac{k \bullet So}{H} + \frac{h \bullet P \bullet H}{4}]}]} \qquad \boxed{Ko1 = [\frac{\varphi \bullet So - (h \bullet P \bullet \frac{H}{2} \bullet To)}{[\frac{k \bullet So}{H} + \frac{h \bullet P \bullet H}{4}]}]}$$ d'où :

On a donc: $\boxed{T(n+1) = -(Ko \bullet T(n) + Ko1)}$

Intégré dans le système, cela donne :

$x_{(2)} \Rightarrow \quad CoT \bullet T2 + Co \bullet T3 = -T_0 - Co \bullet TA$ on a $T1 = TA$

$x_{(3)} \Rightarrow \quad Co \bullet T2 + CoT \bullet T2 + Co \bullet T3 + = -T_0$

$\vdots$

$x_{(n-1)} \Rightarrow \quad Co \bullet T(n-2) + CoT \bullet T(n-1) + Co \bullet T(n) = -T_0$

$x_{(n)} \Rightarrow \quad Co \bullet T(n-1) + CoT \bullet T(n) \bullet [CoT - Co \bullet Ko] = -T_0 + Co \bullet Ko1$

En reportant ce système dans une matrice on a:

Avec
$$M = \begin{vmatrix} CoT & Co & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ Co & CoT & Co & 0 & & & \vdots \\ 0 & Co & CoT & Co & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & Co & CoT & Co & 0 \\ \vdots & & & \ddots & Co & CoT & Co \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Co & CoT - Co \bullet Ko \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{M} \bullet \begin{vmatrix} T2 \\ T3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(n-1) \\ T(n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -T_0 - Co \bullet T1 \\ -T_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -T_0 \\ -T_0 + Co \bullet Ko1 \end{vmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{vmatrix} T2 \\ T3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(n-1) \\ T(n) \end{vmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \bullet \begin{vmatrix} -T_0 - Co \bullet T1 \\ -T_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -T_0 \\ -T_0 + Co \bullet Ko1 \end{vmatrix}$$

3.3 résolution par la méthode des différences finies gauche

$$-k\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{hP}{S}(T-T_0)=0 \qquad -k\bullet y''+\frac{hP}{S}\bullet(y-y_0)=0$$

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i-2\bullet H)-2\bullet f(x_i-H)+f(x_i)}{H^2}$$

$$-k[\frac{T(x_i-2\bullet H)-2\bullet T(x_i-H)+T(x_i)}{H^2}]+\frac{h\bullet P}{S}\bullet T(x_i)-\frac{h\bullet P}{S}\bullet T_0=0$$

$$k[\frac{T(x_i-2\bullet H)-2\bullet T(x_i-H)+T(x_i)}{H^2}]-\frac{h\bullet P}{S}\bullet T(x_i)+\frac{h\bullet P}{S}\bullet T_0=0$$

$$\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}\bullet T(x_i-2\bullet H)-2\bullet\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}\bullet T(x_i-H)+(\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}-1)\bullet T(x_i)=-T_0$$

avec $Co=\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}$ CoT = (Co -1)

on a l'équation: $Co\bullet T(x_i-2\bullet H)-2\bullet Co\bullet T(x_i-H)+CoT\bullet T(x_i)=-T_0$

En appliquant aux autres points on a le système suivant :

$x_{(3)}\Rightarrow \quad Co\bullet T1-(2\bullet Co)\bullet T2+CoT\bullet T3=-T_0$

$x_{(4)}\Rightarrow \quad Co\bullet T2-(2\bullet Co)\bullet T3+CoT\bullet T4=-T_0$

$x_{(5)}\Rightarrow \quad Co\bullet T3-(2\bullet Co)\bullet T4+CoT\bullet T5=-T_0$

$\vdots$

$x_{(n-1)}\Rightarrow \quad Co\bullet T(n-3)-(2\bullet CoT)\bullet T(n-2)+CoT\bullet T(n-1)=-T_0$

$x_{(n)}\Rightarrow \quad Co\bullet T(n-2)+CoT\bullet T(n-1)+Co\bullet T(n)=-T_0$

$x_{(n+1)}\Rightarrow \quad Co\bullet T(n-1)+CoT\bullet T(n)+Co\bullet T(n+1)=-T_0$

$$-k\bullet\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_L=\varphi \qquad \frac{-k\bullet[T(L)-T(L-H)]}{H}=\varphi \quad \text{dérivée arrière}$$

$$\frac{-k\bullet[T(L)-T(L-H)]}{H}=\varphi \text{ ou } \frac{-k\bullet[T(n+1)-T(n)]}{H}=\varphi$$

$$\boxed{T(n+1)=T(n)-\frac{\varphi\bullet H}{k}}$$

nous avons des équations allant jusqu'à n+1, l'équation en n+1 final intègre les pertes du dernier élément.

D'où :

$$\varphi\bullet So=-k\bullet So\bullet\frac{T(n+1)-T(n)}{H}\Rightarrow\boxed{T(n+1)=T(n)-\frac{\varphi\bullet H}{k}}$$

$x_{(1)}\Rightarrow T_1=TA$

$x_{(3)}\Rightarrow \quad -(2\bullet Co)\bullet T2+CoT\bullet T3=-T_0-Co\bullet TA$

$x_{(4)}\Rightarrow \quad Co\bullet T2-(2\bullet Co)\bullet T3+CoT\bullet T4=-T_0$

$x_{(5)}\Rightarrow \quad Co\bullet T3-(2\bullet Co)\bullet T4+CoT\bullet T5=-T_0$

$\vdots$

$x_{(n-1)}\Rightarrow \quad Co\bullet T(n-3)-(2\bullet CoT)\bullet T(n-2)+CoT\bullet T(n-1)=-T_0$

$$x_{(n)} \Rightarrow \quad Co \bullet T(n-2) + CoT \bullet T(n-1) + Co \bullet T(n) = -T_0$$

$$x_{(n+1)} \Rightarrow \quad Co \bullet T(n-1) - (2 \bullet CoT) \bullet T(n) + CoT \bullet Co \bullet (T(n) - \frac{\varphi \bullet H}{k}) = -To$$

$$x_{(n+1)} \Rightarrow \quad Co \bullet T(n-1) + (T(n) \bullet (-2 \bullet CoT + Co)) = -To + Co \bullet \frac{\varphi \bullet H}{k}$$

En reportant ce système dans une matrice on a:

$$\text{Avec } M = \begin{vmatrix} -(2\bullet Co) & CoT & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ Co & -(2\bullet Co) & CoT & 0 & & & \vdots \\ 0 & Co & -(2\bullet Co) & CoT & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & Co & -(2\bullet Co) & CoT & 0 \\ \vdots & & & \ddots & Co & -(2\bullet Co) & CoT \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & Co & -2\bullet CoT + Co \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{M} \bullet \begin{vmatrix} T2 \\ T3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(n-1) \\ T(n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -T_0 - Co \bullet T1 \\ -T_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -T_0 \\ -T_0 + Co \bullet \frac{\varphi \bullet H}{k} \end{vmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{vmatrix} T2 \\ T3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(n-1) \\ T(n) \end{vmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \bullet \begin{vmatrix} -T_0 - Co \bullet T1 \\ -T_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -T_0 \\ -T_0 + Co \bullet \frac{\varphi \bullet H}{k} \end{vmatrix}$$

3.4 résolution par la méthode des différences fines droite

$$-k\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{hP}{S}(T-T_0)=0 \qquad -k\bullet y''+\frac{hP}{S}\bullet(y-y_0)=0$$

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i+2\bullet H)-2\bullet f(x_i+H)+f(x_i)}{H^2}$$

$$-k[\frac{T(x_i+2\bullet H)-2\bullet T(x_i+H)+T(x_i)}{H^2}]+\frac{h\bullet P}{S}\bullet T(x_i)-\frac{h\bullet P}{S}\bullet T_0=0$$

$$k[\frac{T(x_i+2\bullet H)-2\bullet T(x_i+H)+T(x_i)}{H^2}]-\frac{h\bullet P}{S}\bullet T(x_i)+\frac{h\bullet P}{S}\bullet T_0=0$$

$$\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}\bullet T(x_i+2\bullet H)-2\bullet\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}\bullet T(x_i+H)+(\frac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}-1)\bullet T(x_i)=-T_0$$

avec $Co=\dfrac{k\bullet S}{h\bullet P\bullet H^2}$ CoT = (Co -1)

on a l'équation : $CoT\bullet T(x_i)-2\bullet Co\bullet T(x_i+H)+Co\bullet T(x_i+2\bullet H)=-T_0$

En appliquant aux autres points on a le système suivant :

$x_{(1)}\Rightarrow \quad CoT\bullet T1-(2\bullet Co)\bullet T2+Co\bullet T2=-T_0$

$x_{(2)}\Rightarrow \quad CoT\bullet T2-(2\bullet Co)\bullet T3+Co\bullet T4=-T_0$

$x_{(3)}\Rightarrow \quad CoT\bullet T3-(2\bullet Co)\bullet T4+Co\bullet T5=-T_0$

$\vdots$

$x_{(n-3)}\Rightarrow \quad CoT\bullet T(n-3)-(2\bullet Co)\bullet T(n-2)+Co\bullet T(n-1)=-T_0$

$x_{(n-2)}\Rightarrow \quad CoT\bullet T(n-2)-(2\bullet Co)\bullet T(n-1)+Co\bullet T(n)=-T_0$

$x_{(n-1)}\Rightarrow \quad CoT\bullet T(n-1)-(2\bullet Co)\bullet T(n)+Co\bullet T(n+1)=-T_0$

$$-k\bullet\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_L=\varphi \qquad \frac{-k\bullet[T(L+H)-T(L)]}{H}=\varphi$$ formule de Taylor, dérivée avant

posons que la dérivée au point L – H = la dérivée au point L

$$\frac{-k\bullet[T(L)-T(L-H)]}{H}=\varphi \text{ ou } \frac{-k\bullet[T(n+1)-T(n)]}{H}=\varphi$$

$$\boxed{T(n+1)=T(n)-\frac{\varphi\bullet H}{k}}$$

En T(n+1) , Il est nécessaire de considérer les pertes d'énergie du à l'échange thermique avec la température ambiante To entre Tn+1 et T(n+1) - H :

$$\varphi\bullet So=-k\bullet So\bullet\frac{T(n+1)-T(n)}{H}-h\bullet P\bullet H\bullet[\frac{1}{2}\bullet((T(n+1)+T(n))-To]$$

$$\varphi\bullet So+h\bullet P\bullet H\bullet\frac{1}{2}\bullet T(n)-h\bullet P\bullet H\bullet To=-\frac{k\bullet So}{H}\bullet[T(n+1)-T(n)]-h\bullet P\bullet H\frac{1}{2}\bullet(T(n+1))$$

$$\varphi\bullet So+h\bullet P\bullet H\bullet\frac{1}{2}\bullet T(n)-h\bullet P\bullet H\bullet To-\frac{k\bullet So}{H}\bullet T(n)=-\frac{k\bullet So}{H}\bullet T(n+1)-h\bullet P\bullet H\frac{1}{2}\bullet(T(n+1))$$

$$\varphi\bullet So+h\bullet P\bullet H\bullet\frac{1}{2}\bullet T(n)-h\bullet P\bullet H\bullet To-\frac{k\bullet So}{H}\bullet T(n)=-[\frac{k\bullet So}{H}+h\bullet P\bullet H\frac{1}{2}]\bullet(T(n+1))$$

$$-\frac{\varphi \bullet So + [\frac{h \bullet P \bullet H}{2} - \frac{k \bullet So}{H}] \bullet T(n) - (h \bullet P \bullet H \bullet To)}{[\frac{k \bullet So}{H} + \frac{h \bullet P \bullet H}{2}]} = (T(n+1))$$

En posant $\boxed{Ko = \frac{[\frac{h \bullet P \bullet H}{2} - \frac{k \bullet So}{H}])}{[\frac{k \bullet So}{H} + \frac{h \bullet P \bullet H}{2}]}}$ et $\boxed{Ko1 = [\frac{\varphi \bullet So - (h \bullet P \bullet H \bullet To)}{[\frac{k \bullet So}{H} + \frac{h \bullet P \bullet H}{2}]}]}$

On obtient donc: $\boxed{T(n+1) = -(Ko \bullet T(n) + Ko1)}$

<u>Intégré dans le système, cela donne :</u>

$x_{(1)} \Rightarrow \quad -(2 \bullet Co) \bullet T2 + Co \bullet T2 = -T_0 - CoT \bullet TA \qquad T1 = TA$

$x_{(2)} \Rightarrow \quad CoT \bullet T2 - (2 \bullet Co) \bullet T3 + Co \bullet T4 = -T_0$

$x_{(3)} \Rightarrow \quad CoT \bullet T3 - (2 \bullet Co) \bullet T4 + Co \bullet T5 = -T_0$

$\vdots$

$x_{(n-2)} \Rightarrow \quad CoT \bullet T(n-2) - (2 \bullet Co) \bullet T(n-1) + Co \bullet T(n) = -T_0$

$x_{(n-1)} \Rightarrow \quad CoT \bullet T(n-1) - (2 \bullet Co) \bullet Tn) - Co \bullet (Ko \bullet T(n) + Ko1) = -T_0$

et donc :

$x_{(n-1)} \Rightarrow \quad CoT \bullet T(n-1) + T(n) \bullet Co(-2 - Ko) = -T_0 + Co \bullet Ko1$

En reportant ce système dans une matrice on a:

$$\text{avec } M = \begin{vmatrix} -(2 \bullet Co) & Co & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ CoT & -(2 \bullet Co) & Co & 0 & & & \vdots \\ 0 & CoT & -(2 \bullet Co) & Co & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & CoT & -(2 \bullet Co) & Co & 0 \\ \vdots & & & \ddots & CoT & -(2 \bullet Co) & Co \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & CoT & Co(-2 - Ko) \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{M} \bullet \begin{vmatrix} T2 \\ T3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(n-1) \\ T(n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -T_0 - CoT \bullet TA \\ -T_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -T_0 \\ -T_0 + Co \bullet Ko1 \end{vmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{vmatrix} T2 \\ T3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T(n-1) \\ T(n) \end{vmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \bullet \begin{vmatrix} -T_0 - CoT \bullet TA \\ -T_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -T_0 \\ -T_0 + Co \bullet Ko1 \end{vmatrix}$$

4. Déplacement lié aux températures en fonction de la position.

4.1 résolution analytique des déplacements en fonction de la position

L'équation différentielle du déplacement à l'état stationnaire est : $E \bullet S \bullet \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \bullet S \bullet \frac{\partial T}{\partial x} = 0$

On connaît TG(x) = $K_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + K_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x} + T_0$

Alors on connaît aussi : $\frac{TG}{dx} = K_1 \bullet r_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} - K_2 \bullet r_1 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$

En posant :

$B_1 = K_1 \bullet r_1$ et $B_2 = -K_2 \bullet r_1$ on a : $T'(x) = B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$

on a donc l'équation différentielle : $E \bullet S \bullet \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \bullet S \bullet [B_1 \bullet e_{n \bullet x} + B_2 \bullet e_{-n \bullet x}] = 0$

ou bien : $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{E} \bullet B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + \frac{\alpha}{E} \bullet B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$$

L'équation différentielle est de la forme :

a.y''+b.y'+c .y = d avec a = 1 , b = 0 , c = 0 , d = $\frac{\alpha}{E} \bullet B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + \frac{\alpha}{E} \bullet B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$

<u>Résolution de l'équation sans second membre (ESSM) : a.y''+b.y'+c .y = 0</u>

Recherche des solutions de l'équation caractéristique : $a \bullet r^2 + b \bullet r + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta = 0$

b = 0

une racine double: r = $\frac{-b}{2 \bullet a}$ $\Rightarrow$ $r_1 = r_2 = 0$ (ne pas confondre avec r_1 de l'équation de la température TG)

b = 0

$$\boxed{U_{ESSM} = (D_1 + D_2 x) \bullet e^0 = D_1 + D_2 x}$$

1) équation avec second membre :

$$a \bullet y''_{p1} + b \bullet y'_{p1} + c \bullet y_{p1} = \frac{\alpha}{E} \bullet B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x}$$

l'équation de la forme : $U_{p1} = A_1(x) \bullet e^{r_1 \bullet x}$

$U_{p1} = A_1(x) \bullet e^{r_1 \bullet x}$

$U'_{p1} = A_1(x) \bullet r_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + A'_1(x) \bullet e^{r_1 \bullet x}$ posons $0 = A'_1(x) \bullet e^{r_1 \bullet x}$

$U''_{p1} = A'_1(x) \bullet r_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + A_1(x) \bullet r_1^2 \bullet e^{r_1 \bullet x} = A_1(x) \bullet r_1^2 \bullet e^{r_1 \bullet x} \Rightarrow A_1(x) \bullet r_1^2 \bullet e^{r_1 \bullet x} = \frac{\alpha}{E} \bullet B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x}$

$A_1(x) = \frac{\alpha}{r^2 \bullet E} \bullet B_1 \Rightarrow U_{p1} = \frac{\alpha}{r^2 \bullet E} \bullet B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x}$

2) équation avec second membre :

$$a \bullet y''_{p2} + b \bullet y'_{p2} + c \bullet y_{p2} = \frac{\alpha}{E} \bullet B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$$

l'équation de la forme : $U_{p2} = A_2(x) \bullet e^{-r_1 \bullet x}$

$$U_{p2} = A_2(x) \bullet e^{-r_1 \bullet x}$$

$$U'_{p2} = -A_2(x) \bullet r_1 \bullet e^{-r_1 \bullet x} + A'_2(x) \bullet e^{-r_1 \bullet x} \quad \text{posons } 0 = A'_1(x) \bullet e^{-r_1 \bullet x}$$

$$U''_{p2} = -A'_2(x) \bullet r_1 \bullet e^{-r_1 \bullet x} + A_2(x) \bullet r_1^2 \bullet e^{-r_1 \bullet x} = A_2(x) \bullet r_1^2 \bullet e^{-r_1 \bullet x} \Rightarrow A_2(x) \bullet r_1^2 \bullet e^{-r_1 \bullet x} = \frac{\alpha}{E} \bullet B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$$

$$A_2(x) = \frac{\alpha}{r^2 \bullet E} \bullet B_2 \Rightarrow U_{p2} = \frac{\alpha}{r^2 \bullet E} \bullet B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}$$

$$\boxed{Ug = U_{ESSM} + U_{p1} + U_{p2} = D_1 + D_2 x + \frac{\alpha}{r^2 \bullet E} \bullet B_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} + \frac{\alpha}{r^2 \bullet E} \bullet B_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}}$$

$$B_1 = K_1 \bullet r_1$$

$B_2 = -K_2 \bullet r_1$ d'où :

$UG = U_{ESSM} + U_{p1} + U_{p2}$

$$\boxed{UG = D_1 + D_2 x + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} - \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}}$$

Conditions limites :

$$\frac{du}{dx}(x = 0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(x = 0) = 0 \Rightarrow 0 = \Rightarrow D_2 + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_1 \bullet e^{r_1 \bullet 0} + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_2 \bullet e^{-r_1 \bullet 0} = 0$$

$$\boxed{D_2 = -\left(\frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_2 + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_1\right)}$$

u(x = L) = 0 $\Rightarrow$

$$D_1 - \left(\left(\frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_2 + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_1\right) \bullet L\right) + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_1 \bullet e^{r_1 \bullet L} - \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_2 \bullet e^{-r_1 \bullet L} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D_1 = \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_2 \bullet e^{-r_1 \bullet L} - \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_1 \bullet e^{r_1 \bullet L} + \left(\left(\frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_2 + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet r_1 \bullet K_1\right) \bullet L\right)}$$

$$\boxed{UG = D_1 + D_2 x + \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_1 \bullet e^{r_1 \bullet x} - \frac{\alpha}{r_1 \bullet E} \bullet K_2 \bullet e^{-r_1 \bullet x}}$$

4.2 résolution par la méthode des différences fines centrée

$$E \bullet S \bullet \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \bullet S \bullet \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x=0) = 0 \qquad u(x = L) = 0$$

dérivée seconde centrée:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + H) - 2 \bullet f(x_i) + f(x_i - H)}{H^2}$$

dérivée première centrée :

$$f' = \frac{[f(L + \frac{H}{2}) - f(L - \frac{H}{2})]}{H}$$

Intégrée dans l'équation on a :

$$E \bullet S \bullet [\frac{U(x_i + H) - 2 \bullet U(x_i) + U(x_i - H)}{H^2}] - \alpha \bullet S \bullet \frac{[T(x_i + H) - T(x_i - H)]}{2 \bullet H} = 0$$

<u>On obtient au point $x_{(i)}$ l'équation :</u>

$$U(x_i + H) - 2 \bullet U(x_i) + U(x_i - H) = \frac{\alpha \bullet H}{2 \bullet E} \bullet [T(x_i + H) - T(x_i - H)]$$

En appliquant aux autres points on a le système suivant :

$$x_2 \Rightarrow \quad U1 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{2 \bullet E} \bullet [T3 - T1]$$

$$x_3 \Rightarrow \quad U2 - (2 \bullet U3) + U4 = \frac{\alpha \bullet H}{2 \bullet E} \bullet [T4 - T2]$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} \Rightarrow \quad U(n-2) - (2 \bullet U(n-1)) + U(n) = \frac{\alpha \bullet H}{2 \bullet E} \bullet [T(n) - T(n-2)]$$

$$\left.\begin{array}{r} x_n \Rightarrow \quad U(n-1) - (2 \bullet U(n)) + U(n+1) = \frac{\alpha \bullet H}{2 \bullet E} \bullet [T(n+1) - T(n-1)] \\ U(n+1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_n \Rightarrow \quad U(n-1) - (2 \bullet U(n)) = \frac{\alpha \bullet H}{2 \bullet E} \bullet [T(n+1) - T(n-1)]$$

en x=0 on a la condition : $\frac{dU}{dx} = 0$ en x1 on a : $f' = \frac{[U(1 + \frac{H}{2}) - U(1 - \frac{H}{2})]}{H}$

Le point U(1-H/2) n'existant pas, on pose : dérivée au point x1=dérivée au point $x_1 + \frac{H}{2}$ d'où :

$f' = \frac{[U(1 + H) - U(1)]}{H}$ = 0 en x = 1 d'où : $\frac{U2 - U1}{H} = 0$ d'où $\boxed{U2 = U1}$

$x_2 \Rightarrow \quad U1-(2\bullet U2)+U3=\dfrac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet[T3-T1]$ on U1=U2 donc

$$x_2 \Rightarrow \quad -U2+U3=\frac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet[T3-T1]$$
$$x_3 \Rightarrow \quad U2-(2\bullet U3)+U4=\frac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet[T4-T2]$$
$$x_4 \Rightarrow \quad U3-(2\bullet U4)+U5=\frac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet[T5-T3]$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} \Rightarrow \quad U(n-2)-(2\bullet U(n-1))+U(n)=\frac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet[T(n)-T(n-2)]$$
$$x_n \Rightarrow \quad U(n-1)-(2\bullet U(n))=\frac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet[T(n+1)-T(n-1)]$$

En reportant ce système dans une matrice on a:

$$M=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U2 \\ U3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U(n-1) \\ U(n) \end{vmatrix} = \frac{\alpha\bullet H}{2\bullet E}\bullet \begin{vmatrix} [T(3)-T(1)] \\ [T(4)-T(2)] \\ \\ \\ \\ [T(n)-T(n-2)] \\ [T(n+1)-T(n-1)] \end{vmatrix}$$

4.3 résolution par la méthode des différences fines gauche

$$E \bullet S \bullet \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \bullet S \bullet \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x=0) = 0 \qquad u(x = L) = 0$$

dérivée première arrière : $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_i - H)}{H}$

dérivée seconde arrière : $f''(x_i) = \dfrac{f(x_i - 2 \bullet H) - 2 \bullet f(x_i - H) + f(x_i)}{H^2}$

intégré dans l'équation cela donne :

$$E \bullet S \bullet [\frac{U(x_i - 2 \bullet H) - 2 \bullet U(x_i - H) + U(x_i)}{H^2}] - \alpha \bullet S \bullet \frac{[T(x_i) - T(x_i - H)]}{H} = 0$$

On obtient au point $x_{(i)}$ l'équation :

$$U(x_i - 2 \bullet H) - 2 \bullet U(x_i - H) + U(x_i) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(x_i) - T(x_i - H)]$$

En appliquant aux autres points on a le système suivant :

$$x_3 \Rightarrow \quad U1 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T3 - T2]$$

$$x_4 \Rightarrow \quad U2 - (2 \bullet U3) + U4 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T4 - T3]$$

$$x_4 \Rightarrow \quad U2 - (2 \bullet U3) + U4 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T4 - T3]$$

$$\vdots$$

$$x_n \Rightarrow \quad U(n-2) - (2 \bullet U(n-1)) + U(n) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(n) - T(n-1)]$$

$$x_{n+1} \Rightarrow \quad U(n-1) - (2 \bullet U(n)) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(n+1) - T(n)] \qquad \text{car } Un+1=0$$

en x=0 : $\dfrac{dU}{dx} = 0 \qquad f' = \dfrac{[U1 - U(1-H)]}{H}$

On pose : dérivée au point U(1+H) = dérivée au point U1 d'où :

$f' = \dfrac{[U2 - U(2-H)]}{H}$ = 0 en x = 1 d'où : $\dfrac{U2 - U1}{H} = 0$ et $\boxed{U2 = U1}$

$$x_3 \Rightarrow \quad U1 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T3 - T2] = U2 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T3 - T2]$$

$$= -U2 + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T3 - T2]$$

U(x = L) =0

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U2 \\ U3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U(n-1) \\ U(n) \end{vmatrix} = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet \begin{vmatrix} [T(3) - T(2)] \\ [T(4) - T(3)] \\ \\ \\ \\ [T(n) - T(n-1)] \\ [T(n+1) - T(n)] \end{vmatrix}$$

4.4 résolution par la méthode des différences fines droite

$$E \bullet S \bullet \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \bullet S \bullet \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x=0) = 0 \quad \text{u(x = L) = 0}$$

dérivée seconde avant:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + 2 \bullet H) - 2 \bullet f(x_i + H) + f(x_i)}{H^2}$$

dérivée première avant :

$$f' = \frac{f(x_i + H) - f(x_i)}{H}$$

$$E \bullet S \bullet [\frac{U(x_i + 2 \bullet H) - 2 \bullet U(x_i + H) + U(x_i)}{H^2}] - \alpha \bullet S \bullet \frac{[T(x_i + H) - T(x_i)]}{H} = 0$$

$$U(x_i) - 2 \bullet U(x_i + H) + U(x_i + 2 \bullet H) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(x_i + H) - T(x_i)]$$

$$x_1 \Rightarrow \quad U1 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T2 - T1]$$

$$x_2 \Rightarrow \quad U2 - (2 \bullet U3) + U4 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T3 - T2]$$

$\vdots$

$$x_{n-3} \Rightarrow \qquad U(n-3) - (2 \bullet U(n-2)) + U(n-1) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(n-2) - T(n-3)]$$

$$x_{n-2} \Rightarrow \qquad U(n-2) - (2 \bullet U(n-1)) + Un = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(n-1) - T(n-2)]$$

$$x_{n-1} \Rightarrow \qquad U(n-1) - (2 \bullet U(n)) + U(n+1) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(n) - T(n-1)]$$

$$x_{n-1} \Rightarrow \qquad U(n-1) - (2 \bullet U(n)) = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T(n) - T(n-1)] \qquad \text{car Un+1=0}$$

en x = 0 $\frac{dU}{dx} = 0$ $\qquad f' = \frac{U(1+H) - U1}{H}$

d'où :

$$\frac{U2 - U1}{H} = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\text{U2 = U1}}$$

$$x_1 \Rightarrow \quad U1 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T2 - T1] = U2 - (2 \bullet U2) + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T2 - T1]$$

$$= -U2 + U3 = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet [T2 - T1]$$

U(x = L) =0

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U2 \\ U3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U(n-1) \\ U(n) \end{vmatrix} = \frac{\alpha \bullet H}{E} \bullet \begin{vmatrix} [T(2) - T(1)] \\ [T(3) - T(2)] \\ \\ \\ \\ [T(n-1) - T(n-2)] \\ [T(n) - T(n-1)] \end{vmatrix}$$

5. Structure du programme

DECLARATION VARIABLES , DEMANDE DE PARAMETRES A L' OPERATEUR

↓

CALCUL DES TEMPERATURES EN FONCTION DE LEUR POSITION, PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

- CALCUL PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTREES
- CALCUL PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES GAUCHES
- CALCUL PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES DROITE

↓

CALCUL DES DEPLACEMENTS LIES AUX TEMPERATURES EN FONCTION DE LEUR POSITION, PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

- CALCUL PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTREES
- CALCUL PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES GAUCHES
- CALCUL PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES DROITE

↓

CALCUL DES TEMPERATURES EN FONCTION DE LEUR POSITION, PAR LA METHODE ANALYTIQUE

CALCUL DES DEPLACEMENTS LIES AUX TEMPERATURES EN FONCTION DE LEUR POSITION, PAR LA METHODE ANALYTIQUE

↓

CHOIX ET TRACAGE COURBES

6. Programme

```
%                  |----------------------------------------
%                  |              programme de calcul         |
%                  | des températures, des déplacements,      |
%                  | en fonction de la position du point :    |
%                  |----------------------------------------|
%
%                   _____________________________
%                  | déclaration des variables |
%                  |___________________________|
%
close all ;        % clear graphique

clear ;            % efface toutes les variables
%
To=300;            % (°K)             température extérieur
TA=320;            % (°K)             température gauche
fi=+0;             % (W.M^-2)        flux droit (entre 100 et 10^8)
k=222;             % ( W.m^-1.K^-1)   coefficient de conductibilité thermique
So=0.005*0.005;    % (M^2)            section de la poutre (carrée)
h=5;               % (W.m^-2.K^-1)    coefficient de perte de chaleur ou
coefficient d'échange
P=(0.005)*4;       % (M)              périmètre de la poutre
L=2;               % (M)              longueur de la poutre
n=10;              %                  nombre de points relevés de température (n>3)
E = 68000;         % (MPa)            Module d'élasticité ou module de Young
alpha = 0.000023; % (°K^-1) à 20°C   Coefficient de dilatation linéique
%
disp('Projet: Etude de la température et du déplacement d un point sur une
poutre');
disp('en fonction de la température droite, du flux gauche, et de la température
ambiante');
disp(' ');
disp(' température extérieure > 0°K');                   % demande de coordonnées
à l'opérateur
To = input ('entrez la température extérieure(°K) = ');  %
disp(' ');                                               %
disp(' température à gauche de la poutre > 0°K');        %
TA = input ('entrez la température gauche(°K) = ');      %
disp(' ');                                               %
disp(' flux droit (entre 100 et 10^8) en(W.M^-2)');      %
fi = input ('entrez le flux = ');                        %
disp(' ');                                               %
disp( 'le pas doit être >3')  ;                          %
n = input ('entrez le nombre d intervalles = ');         %
disp(' ');                                               %
%
%
H =L/n;                                                  % (M)             pas de
discrétisation
%
```

```
%-----------------------------------------------------------------------------
%*************** différences finies température en fonction position ********
%-----------------------------------------------------------------------------
% ____________________________________________________________________________
%| Calcul constante pour remplissage matrice température en fonction position |
%|____________________________________________________________________________|
%
Co   = (k*So)/(h*P*H*H);                        %coefficent de T-1 et T+1
CoTc = -((2*Co)+1);                             %coefficient de T (centrée)
CoTg = (Co - 1) ;                               % coefficient de T (gauche )
CoTd = (Co - 1);                                % coefficient de T ( droit)

Koc   = (h*P*H/4-k*So/H)/(k*So/H + h*P*H/4);       % coefficient de regroupement
calcul température méthode centrée
Ko1c  = (fi*So - h*P*H*To/2)/(k*So/H + h*P*H/4);   %
Kog   = (0*P*H/4-k*So/H)/(k*So/H + 0*P*H/4);       % coefficient de regroupement
calcul température méthode gauche
Ko1g  = (fi*So - 0*P*H*To/2)/(k*So/H + 0*P*H/4);   %
Kod   = (h*P*H/2-k*So/H)/(k*So/H + h*P*H/2);       % coefficient de regroupement
calcul température méthode droite
Ko1d  = (fi*So - h*P*H*To)/(k*So/H + h*P*H/2);     %

%               __________________________________
%              |    Remplissage de la matrice M  |
%              |____différence finie centrée_____|
%
Ac=repmat(Co,n-1,1);                         % remplir des coefficients colonne
servant à charger la diagonale inférieure
Cc=repmat(Co,n-1,1);                         % remplir de coefficients colonne
servant à charger la diagonale supérieure
Bc=repmat(CoTc,n-1,1);                       % remplir de coefficient colonne
servant à charger la diagonale centrale
Bc(n-1) = CoTc-Co*Koc;                       % remplir le dernier coefficient de
la diagonal centrale (en intégrant que fi= -K.dt/dx (en nh=L)
Mc=spdiags([Ac Bc Cc], -1:1, (n-1),(n-1));   % remplir les 3 diagonales de la
matrice M des coefficients
%               _____________________________________________________________
%              |  Stockage des solutions des (n-2)équations de la matrice S |
%              |________différence finie centrée____________________________|
%
Sc=repmat(-To,n-1,1);    % remplir des résultats la matrice S résultat des n-2
fonctions
Sc(2)=-To-Co*TA;         % remplir le résultat  S(1) dans la matrice résultat des
n-2 fonctions
Sc(n)= -To+Co*Ko1c;      % stockage solution  S(n)particulière dans la matrice
résultat
%
%
```

```
%     ________________________________________________________________
%    |  la matrice ds Températures                                    |
     | (entre n= 2 et n = n-1)  =  matrice inverse de M  x  matrice S |
%    |______________différence finie centré___________________________|
%
%( fonction '\ ' :comatrice ou matrice des cofacteurs (de M*), si déterminant non
nul transposer la matrice ou symétrie / diagonale)
%
Tc=Mc\Sc(2:n);                       %calcul température de T2 à Tn-1
Tcfinal(2:n)=Tc;                     % stockage des calculs de température de T2
à Tn-1
Tcfinal(1)=TA;                       %stockage consigne température extreme
gauche
Tcfinal(n+1)= -(Koc*Tcfinal(n)+Ko1c);  %stockage température (n+1) centrée
%
%               __________________________________
%              |    Remplissage de la matrice M  |
%              |____différence finie gauche______|
%
Ag=repmat(Co,n-1,1);                     % remplir des coefficients colonne
servant à charger la diagonale inférieure
Cg=repmat(CoTg,n-1,1);                   % remplir de coefficients colonne
servant à charger la diagonale supérieure
Bg=repmat(-(2*Co),n-1,1);                % remplir de coefficient colonne
servant à charger la diagonale centrale
Bg(n-1) =-CoTg*Kog-2*Co;                 % remplir le dernier coefficient de la
diagonal centrale (en intégrant que fi= -K.dt/dx (en nh=L)
Mg=spdiags([Ag Bg Cg], -1:1, (n-1),(n-1)); % remplir les 3 diagonales de la
matrice M des coefficients
%               _____________________________________________________________
%              |  Stockage des solutions des (n-2)équations da la matrice S |
%              |________différence finie gauche_____________________________|
%
Sg=repmat(-To,n-1,1);          %remplir des résultats la matrice S résultat des n-
2 fonctions
Sg(2)=-To-Co*TA;               %remplir le résultat  S(1) dans la matrice résultat
des n-2 fonctions
Sg(n)= -To+CoTg*Ko1g;          % stockage solution  S(n)particulière dans la
matrice résultat
%
%         ___________________________________________________________________
%        |  la matrice des Températures                                      |
         |  (entre n= 2 et n = n-1)  =  matrice inverse de M  x  matrice S |
%        |______________différence finie gauche____________________________|
%
%( fonction '\ ' :comatrice ou matrice des cofacteurs (de M*), si déterminant non
nul transposer la matrice ou symétrie / diagonale)
Tg=Mg\Sg(2:n);                        %calcul température de T2 à Tn-1
Tgfinal(2:n)=Tg;                      % stockage des calculs de température de
T2 à Tn-1
Tgfinal(1)=TA;                        %stockage consigne température extreme
gauche
Tgfinal(n+1)= -(Kog*Tgfinal(n)+Ko1g);   %stockage température(n+1) gauche
%
%
```

```
%               ________________________________
%              |    Remplissage de la matrice M  |
%              |____différence finie droite______|
%
Ad=repmat(CoTd,n-1,1);                      % remplir des coefficients colonne
servant à charger la diagonale inférieure
Cd=repmat(Co,n-1,1);                        % remplir de coefficients colonne
servant à charger la diagonale supérieure
Bd=repmat(-(2*Co),n-1,1);                   % remplir de coefficient colonne
servant à charger la diagonale centrale
Bd(n-1) =Co*(-2-Kod);                       % remplir le dernier coefficient de la
diagonal centrale (en intégrant que fi= -K.dt/dx (en nh=L)
Md=spdiags([Ad Bd Cd], -1:1, (n-1),(n-1)); % remplir les 3 diagonales de la
matrice M des coefficients
%               ___________________________________________________________
%              |  Stockage des solutions des (n-2)équations de la matrice S |
%              |________différence finie droite_____________________________|
%
Sd=repmat(-To,n-1,1);      %remplir des résultats la matrice S résultat des n-2
fonctions
Sd(2)=-To-CoTd*TA;         %remplir le résultat  S(1) dans la matrice résultat des
n-2 fonctions%
Sd(n)= -To+Co*Ko1d;        % stockage solution  S(n)particulière dans la matrice
résultat
%
%         _________________________________________________________________
%        |  la matrice des Températures `                                   |
         |    (entre n= 2 et n = n-1)  =  matrice inverse de M  x  matrice S |
%        |______________différence finie droite______________________________|
%
%( fonction '\ ' :comatrice ou matrice des cofacteurs, si déterminant non nul
transposer la matrice ou symétrie / diagonale)
Td=Md\Sd(2:n);                        %calcul température de T2 à Tn-1
Tdfinal(2:n)=Td;                      % stockage des calculs de température de T2
à Tn-1
Tdfinal(1)=TA;                        %stockage consigne température extreme
gauche
Tdfinal(n+1)= -(Kod*Tdfinal(n)+Ko1d);  %stockage température (n+1) droite




%---------------------------------------------------------------------------
%*************** différences finies déplacement en fonction position ********
%---------------------------------------------------------------------------
%          _______________________________________________________
%         |  fabrication matrice des équations de déplacement     |
          |   (centrée, gauche, droite,identique)                  |
%         |_______________________________________________________|
%
Adep = repmat (1,n-1,1);                              % remplir des coefficients
colonne servant à charger la diagonale inférieure
Cdep = repmat (1, n-1,1);                             % remplir de coefficients
colonne servant à charger la diagonale supérieure
Bdep = repmat (-2,n-1,1);                             % remplir de coefficient
colonne servant à charger la diagonals centrale
Bdep(1) = -1;                                         % remplir le premier
coefficient de la diagonal centrale (en intégrant que du/dx(x=0) = 0  )
Mdep = spdiags([Adep Bdep Cdep], -1:1, (n-1),(n-1)); % création de la matrice des
équations de déplacement en fonction des diagonales ci-dessus construites
coef = (alpha*H)/E;                                   % regroupe le coefficient
multiplicateur (pour simplifier l'écriture)
```

```
%                      _____________________________________
%                     | Solution par les différences finies |
%                     |_____________________________________|
%
%                                          ___________
%                                         |  centrée  |
%                                         |___________|
%
%                                   matrice solution des équations différence
finie centrée  (voir feuille jointe)
%
for x =2:n
    Sdepc(x,1)= 0.5*coef*(Tcfinal(x+1) - Tcfinal(x-1));   % matrice solutions des
(n-2) équations ( le 0.5 est spécifique à la dif centrée)
end
%                                  matrice centrée des déplacements
%
Uc = Mdep\Sdepc(2:n);   % inverse matrice ( cofacteur, transposé, (x
1/déterminant?) x matrice solution
Ucfinal(2:n) = Uc ;     % chargement de n = 1 à (n-1) des valeurs calculées en
fonction des solutions des (n-2) équations
Ucfinal(n+1) = 0;       % chargement condition limite en nH où U = 0
Ucfinal(1) =Ucfinal(2); % chargement condition limite en n=0 où U1 = U2
%                                          ___________
%                                         |  gauche   |
%                                         |___________|
%
%                                  matrice solution des équations différence finie
gauche    (voir feuille jointe )
%
for x =2:n
    Sdepg(x,1)= coef*(Tgfinal(x+1) - Tgfinal(x));   % matrice solutions des (n-2)
équations
end
%
%                                  matrice gauche des déplacements
%
Ug = Mdep\Sdepg(2:n);
Ugfinal(2:n) = Ug ;     % chargement de n = 1 à (n-1) des valeurs calculées en
fonction des solutions des (n-2) équations
Ugfinal(n+1) = 0;       % chargement condition limite en nH ou U = 0
Ugfinal(1) =Ugfinal(2); % chargement condition limite en n=0 où U1 = U2
%                                          ___________
%                                         |  droite   |
%                                         |___________|
%
%                                  matrice solution des équations différence finie
droite    (voir feuille jointe)
%
for x =2:n
    Sdepd(x,1)= coef*(Tdfinal(x) - Tdfinal(x-1));   % matrice solutions des (n-2)
équations
end
%                                  matrice droite des déplacements
Ud = Mdep\Sdepd(2:n);
Udfinal(2:n) = Ud ;     % chargement de n = 1 à (n-1) des valeurs calculées en
fonction des solutions des (n-2) équations
Udfinal(n+1) = 0;       % chargement condition limite en nH ou U = 0
Udfinal(1) =Udfinal(2); % chargement condition limite en n=0 où U1 = U2
```

```
%    _______________________________________________________________________
%    |      solution analytique de la température en fonction de la position |
%    |_______________________________________________________________________|
%
%                 transposition de variables
a = -k;                             % a.r^2 + b.r + c = 0      a.y'' + b.y'+c.y =
d     delta positif => 2 racines linéairement indépendantes r1 et -r1
c = (h*P)/So ;                      %
r1 =((k*c)^(1/2))/-k;               %  racine du discriminant
KFI =  fi * ((So/(h*P*k))^(1/2));   %  constante permettant d'alléger l'équation
K1 = ((TA - To)* (exp(-r1*L)) + KFI)  /   ((exp(r1*L)) + (exp(-r1*L)))  ;   %
constantes liée à l'équation différenciel
K2 = ((TA - To)* (exp(r1*L)) - KFI)  /   ((exp(r1*L)) + (exp(-r1*L)))  ;    %
%
x = 0:H:L;
Tanaly = To +  ( K1  * (exp(r1*x)))  + ( K2 * (exp(-r1*x))) ;   % équation calcul
des températures ( voir feuilles jointes)
for i=1:n+1
   ErTc(i) =(Tcfinal(i)- Tanaly(i))/Tanaly(i);
   ErTg(i) =(Tgfinal(i)- Tanaly(i))/Tanaly(i);
   ErTd(i) =(Tdfinal(i)- Tanaly(i))/Tanaly(i);
   ErTT(i) =(Tgfinal(i)- Tdfinal(i))/Tgfinal(i);
end
%     _______________________________________________________________________
%    |   solution analytique du déplacement                                   |
     |   lié à la température en fonction de la position(voir feuille jointe)|
%    |_______________________________________________________________________|
%
coef1 = alpha/(r1*E);                                             % regroupe un
coefficient multiplicateur de la solution analytique
D2 = -((coef1*r1*K2) + (coef1*r1*K1));                            % Uessm = D1 +
D2.x
D1 = (coef1*K2*(exp(-r1*L))) -(coef1*K1*(exp(r1*L)))- (D2*L);     %
%
 x = 0:H:L;
Uanaly = D1 + D2*x + (coef1*K1*exp(r1*x)) - (coef1*K2*exp(-r1*x)); % équation
général du déplacement en fonction de la température et de la position
for i=1:n+1
   ErUc(i) =(Ucfinal(i)- Uanaly(i))/Uanaly(i);
   ErUg(i) =(Ugfinal(i)- Uanaly(i))/Uanaly(i);
   ErUd(i) =(Udfinal(i)- Uanaly(i))/Uanaly(i);
   ErUU(i) =(Ugfinal(i)- Udfinal(i))/Ugfinal(i);
end
aLtotal = 0
Ltotal = 0
for i=1:n+1
  aLtotal = aLtotal  + Uanaly(i);
end
Ltotal = L + aLtotal;
```

```
%                              -----------------------------------------
%                             |            traçage courbes              |
%                             ------------------------------------------
disp('choix N° 1 :courbe de températures en fonction de la position ');
disp('choix N° 2 :courbe déplacement lié à la température en fonction de la
position');
disp('choix N° 3 :Erreur relative des courbes de températures en fonction de la
position ');
disp('choix N° 4 :Erreur relative des courbes de déplacement lié à la température
en fonction de la position');

choix =input ('entrez votre choix de courbe  N° = ');
if choix == 1
              courbe = 1;      % tracé de températures en fonction de la position
elseif choix == 2
              courbe = 2;      % tracé du déplacement lié à la température en
fonction de la position
 elseif choix == 3
              courbe = 3;      % tracé erreur relative à la température en
fonction de la position
 elseif choix == 4
              courbe = 4;      % tracé erreur relative du déplacement lié à la
température en fonction de la position

 elseif choix ~= 1&2&3&4
              disp ('erreur de choix, choix N° 1 par défaut ');
              courbe = 1;
end
if courbe == 1
hold on;
plot(x,Tcfinal,'g');    % vert  : courbe température par les différences finie
centrée
hold on;
plot(x,Tgfinal,'b');    % bleu  : courbe température par les différences finie
gauche
hold on;
plot(x,Tdfinal,'r');    % rouge : courbe température par les différences finie
droite
hold on;
plot(x,Tanaly,'k');     % noir  : courbe température par la solution analytique
title ('               tracé de températures en fonction de la position( vert:
centrée, bleu: gauche, rouge: droite, noir: analytique)');
ylabel('température (°K)');
elseif courbe == 2
hold on;
plot(x,Ucfinal,'g');    % vert   : déplacement selon la différence finie centrée
hold on;
plot(x,Ugfinal,'b');    % bleu   : déplacement selon la différence finie gauche
hold on;
plot(x,Udfinal,'r');    % rouge  : déplacement selon la différence finie droite
hold on;
plot (x,Uanaly,'k');       % noir   : déplacement selon la solution analytique
title ('                 tracé du déplacement lié à la température en fonction de
la position (vert: centrée, bleu: gauche, rouge: droite, noir: analytique)');
ylabel('déplacement (M)');
elseif courbe == 3
hold on;
plot(x,ErTc,'g');    % vert   : erreur relative température  selon la différence
finie centrée
hold on;
plot(x,ErTg,'b');    % bleu   :  erreur relative température  selon la différence
finie gauche
hold on;
plot(x,ErTd,'r');    % rouge  : erreur relative température selon la différence
finie droite
```

```
hold on;
plot (x,ErTT,'k');   % noir   : erreur relative température selon la solution
analytique
title ('              tracé de températures en fonction de la position( vert:
centrée, bleu: gauche, rouge: droite, noir: droite/gauche)');
ylabel('erreur relative (%)');
elseif courbe == 4
hold on;
plot(x,ErUc,'g');    % vert   : erreur relative déplacement  selon la différence
finie centrée
hold on;
plot(x,ErUg,'b');    % bleu   :  erreur relative déplacement  selon la différence
finie gauche
hold on;
plot(x,ErUd,'r');    % rouge  : erreur relative déplacement selon la différence
finie droite
hold on;
plot (x,ErUU,'k');   % noir   : erreur relative déplacement selon la solution
analytique
title ('                tracé du déplacement lié à la température en fonction de
la position (vert: centrée, bleu: gauche, rouge: droite, noir: droite/gauche)');
ylabel('erreur relative (%)');
end

xlabel('position (M)    ');
zoom on  ;              % active le zoom .... la souris pour la fenêtre courante
```

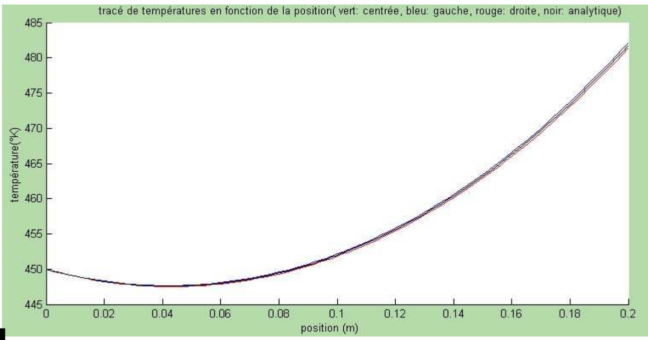
7. Analyse des courbes et des erreurs obtenues

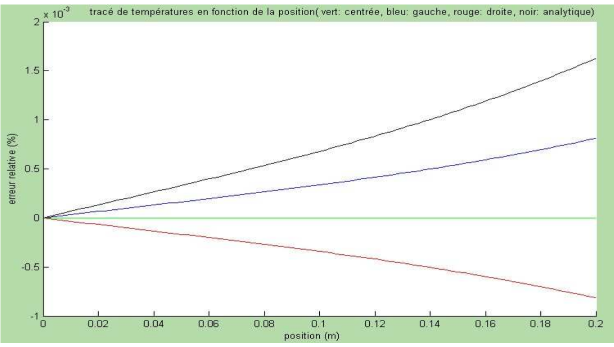
Nous avons pris les paramètres de références:

TA=450 °K			
To=300 °K	Puis changé To	=>	150 °K
Fi=-100000 W/M2	Puis changé fi	=>	+100000 W/M2
L=0.2 M	Puis changé L	=>	2 M
n=100	Puis changé n	=>	10 et 1000

To=300°K TA=450°K fi=-100 000W/M2 L=0.2 M

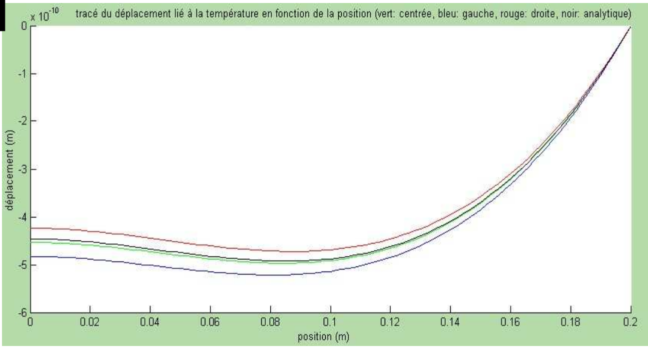
Températures:

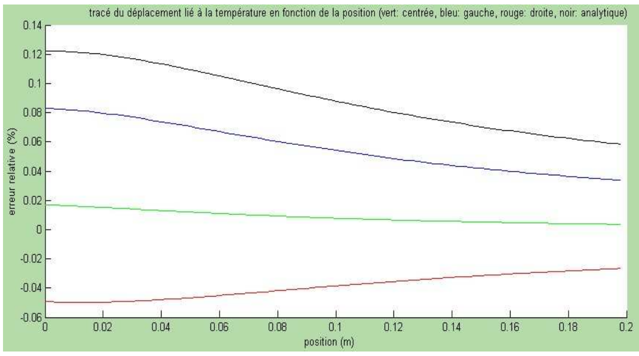




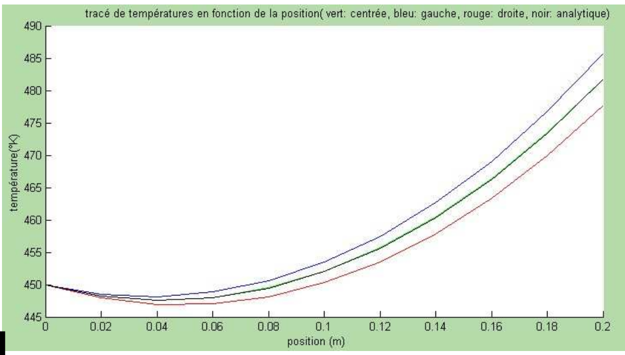
n=100

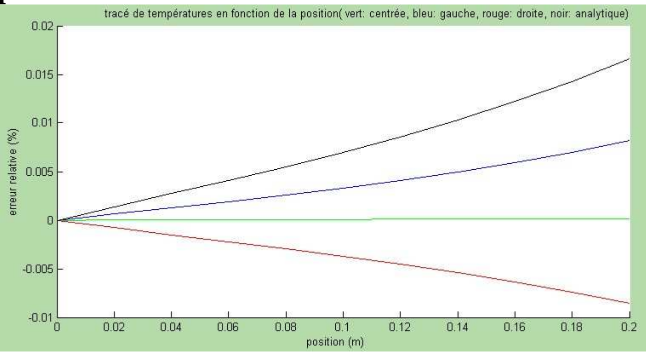
Déplacements :





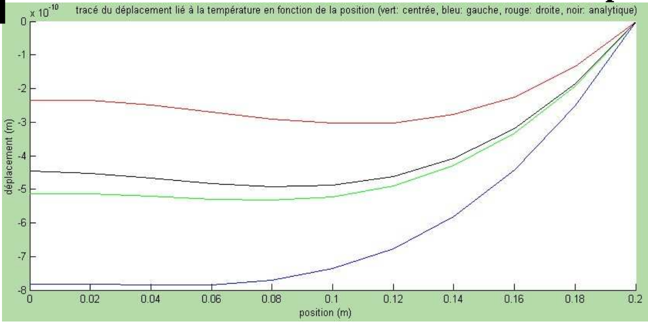
Températures:

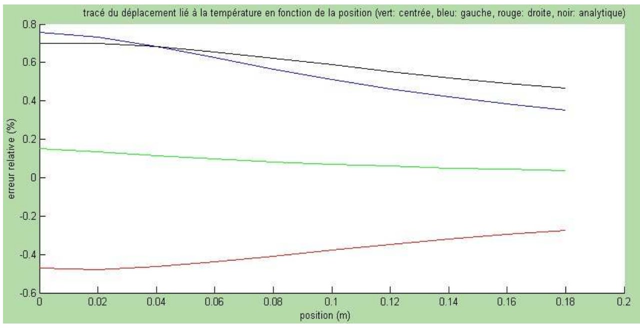




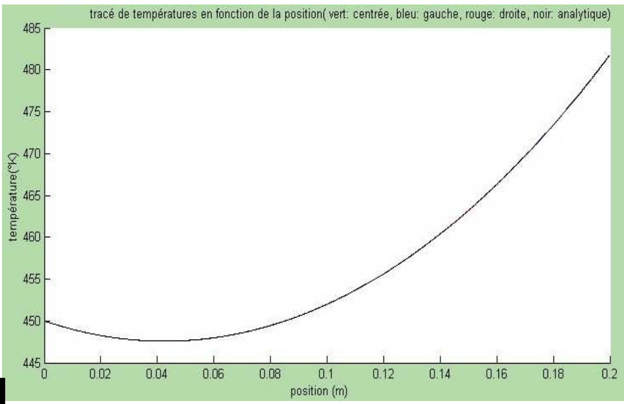
n=10

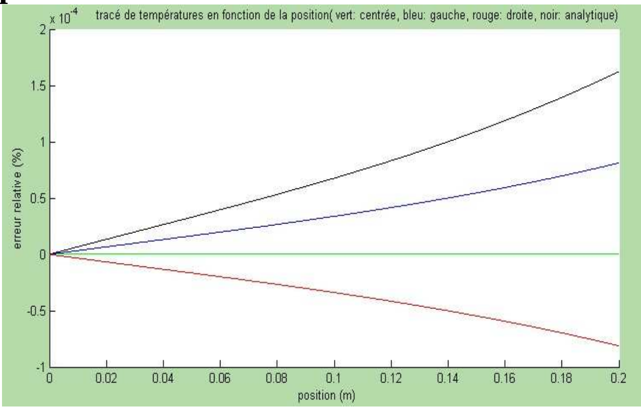
Déplacements :





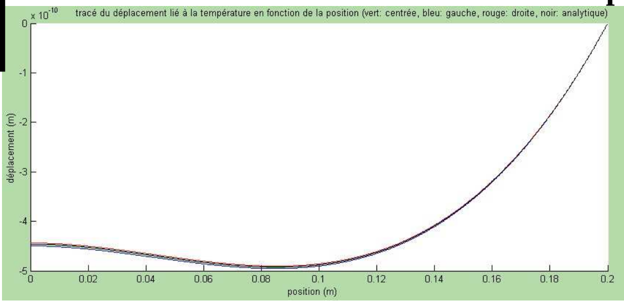
Températures:

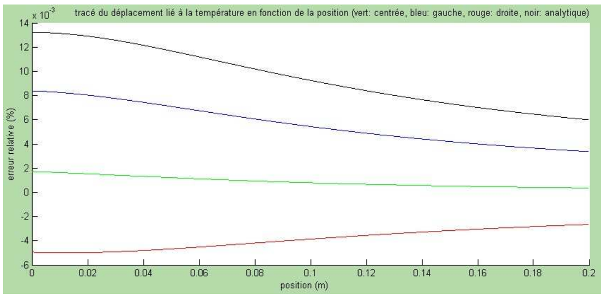




n=1000

Déplacements :





<u>Remarques:</u>

<u>Températures :</u> diff centré toujours + précise ; les erreur sont en L: car approx, à gauche pas d'erreur car T1=TA fixé

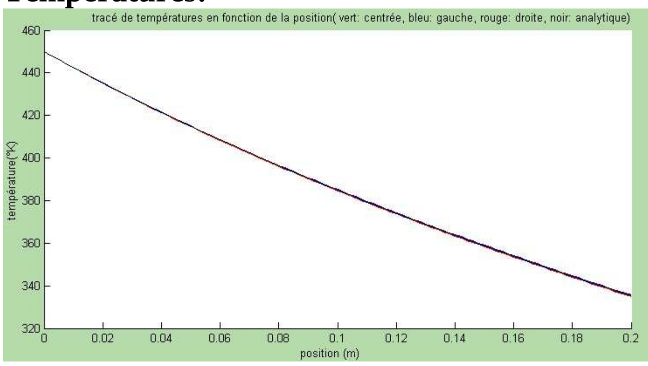
erreur en x=L (diff-gauche): n=10: *0.8*10-2%* n=100: *0.8*10-3%* n=1000*: 0.8*10-4%*

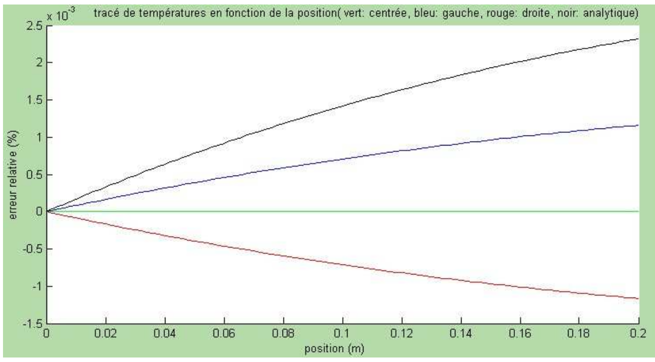
<u>Déplacements :</u> Méthode diff centré + précise. ; erreurs + grandes en x=0 car approx Et en x=L erreurs faibles mais existantes car on intègre aussi les erreurs de températures.

Erreurs en x=0 (diff gauche): n=10: *0.8%* n=100: *0.8*10-1%* n=1000*: 0. 8*10-2%*

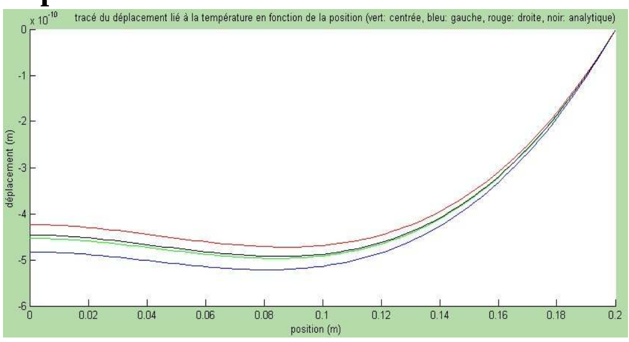
<u>TO=300 TA=450 fi=+100 000 L=0.2 n=100</u>

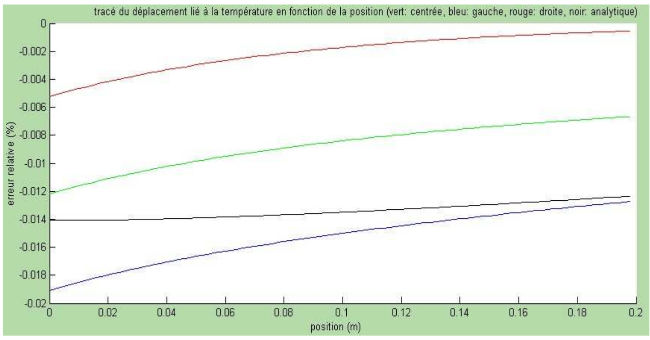
Temperatures:





Déplacements:





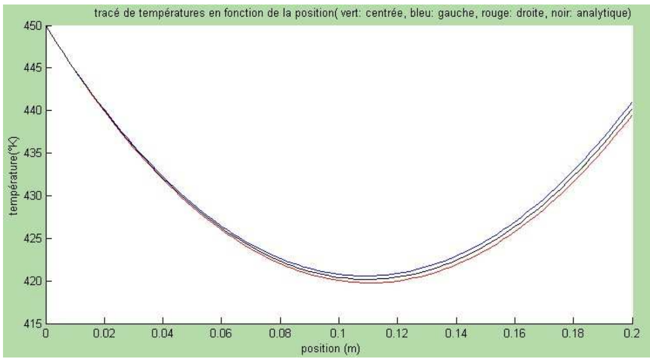
<u>Remarques:</u>

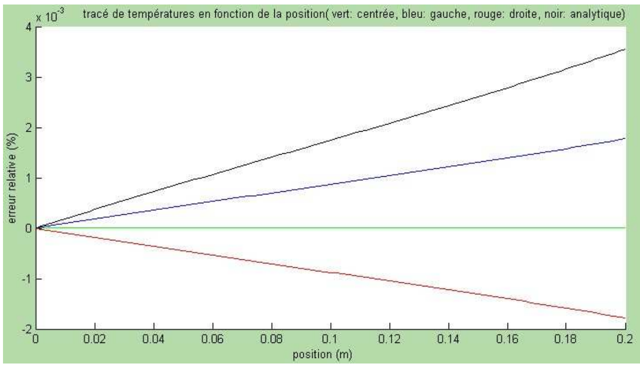
<u>Températures :</u> la centré toujours + pécise.

<u>Déplacements :</u> La droite toujours la + précise (dû à l'approx en X=0);

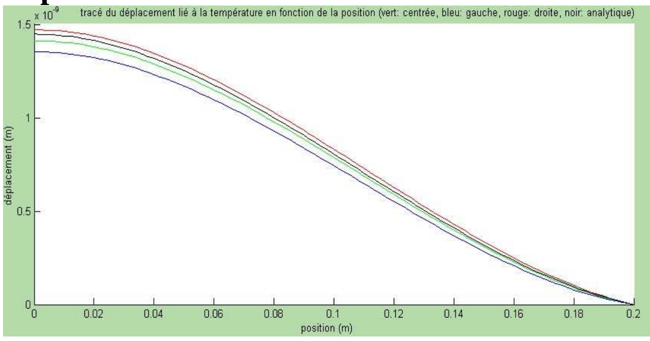
<u>TO=150 TA=450 fi= -100 000 L=0.2 n=100</u>

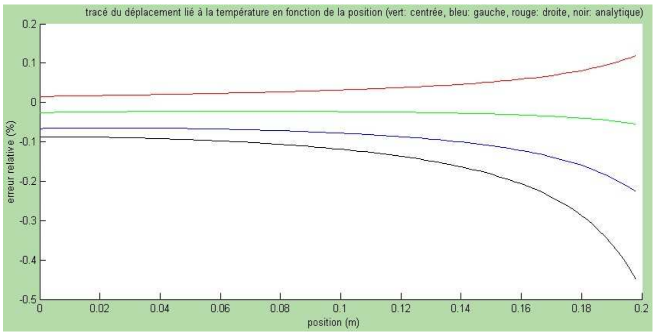
Températures





Déplacements





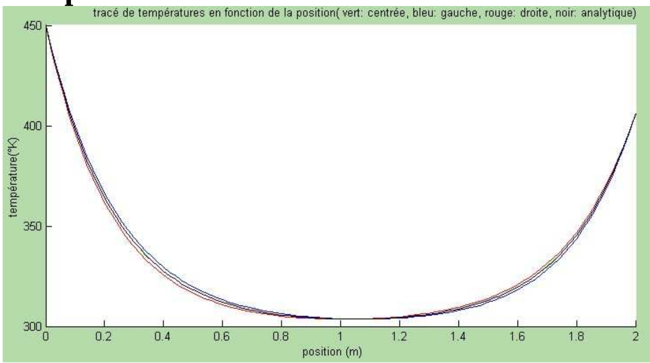
<u>Remarques:</u>

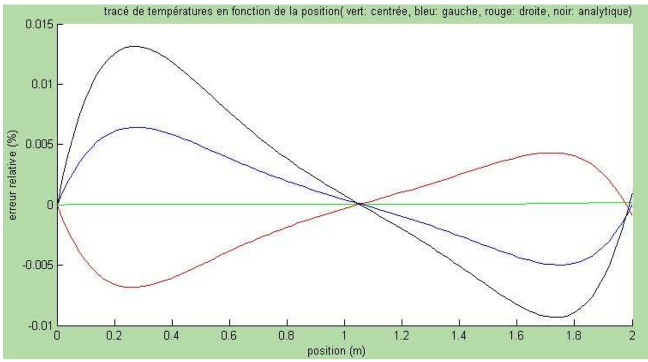
<u>Températures :</u> la centré toujours + précise.

<u>Déplacements :</u> En x=0 la droite est la + précise ; En L la centré est + précise (influence précision températures).

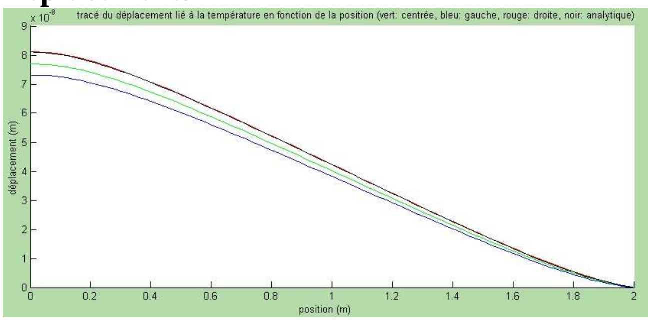
<u>TO=300 TA=450 fi= -100 000 L=2 n=100</u>

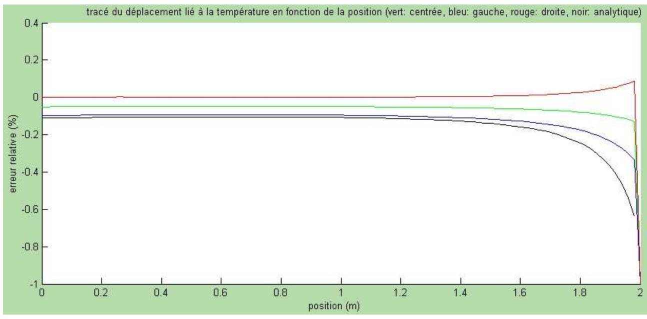
Températures





Déplacements





<u>Remarques:</u>

<u>Températures :</u> la centré toujours + précise ; mais en x=L : ????

<u>Déplacements :</u> La droite est tjrs la + précise ; en x=L division par 0;

8. Conclusions

En observant que :
-Pour les températures : la méthode centré est toujours la + précise* ; Méthodes droite et gauches se valent. *(pour L=2 : localement au point x=L, la gauche est meilleure)

-Pour les déplacements avec :	classique :	La méthode centré est la + précise
	Fi=100000 :	La droite + précise
	L=2 :	La méthode à droite est + précise
	To=150 :	en x=0 droite + précise; en x=L centré la + précise

Analyse:

<u>Température:</u>

Au point n+1 la courbe tend vers la gauche, normal, l'estimation de la dérivé est au point n+1
Est une dérivée à gauche.

Si non la méthode centrée tend globalement vers l'analytique.

<u>Déplacement :</u>

lorsque la température de gauche avoisine la température ambiante, la méthode la droite tend globalement vers l'analytique:
Explication possible :
Sur x = 0 l'approximation global est faite par rapport à la dérivée droite.

En regardant les courbes des erreurs relatives, il y a un décrochement sur globalement l'avant dernier point :

Dans nos calculs nous considérons qu'il n'y a pas de déplacement au dernier point, alors qu'en pratique et en théorique, c'est faux.

<u>D'où :</u>

Nous utiliserons toujours la centrée pour calculer les températures et les déplacements.
En revanche, pour calculer les déplacements,lorsque la température de poutre vient se confondre en un point avec la température ambiante, nous prendrons dans ce cas précis, la méthode droite .