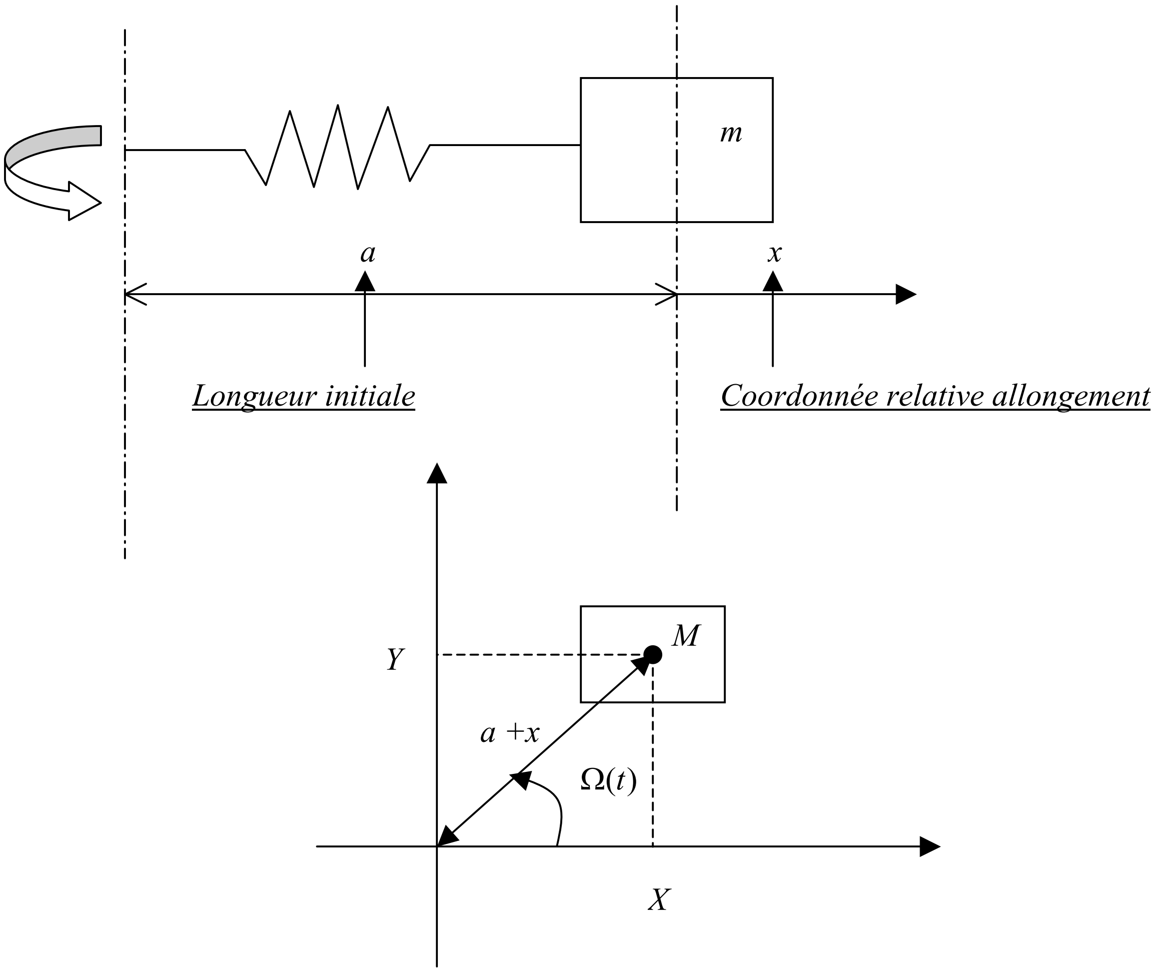
Exercice 24 janvier 2004

Exercice système masse ressort en rotation uniforme :



1°) En notant X et Y les coordonnée absolue, calculer la vitesse absolue de la masse
2°) Calculer les énergies potentiel et cinétique, et ses contributions d'entraînement (T_0) et relative (T_2).
3°)Calculer les positions d'équilibre et discuter de sa nature (stable, instable,…)

écrire l'équation de la distance, la dériver par rapport au temps pour obtenir la vitesse :

$$\left.\begin{aligned} X &= (a + x(t)) \bullet \cos(\Omega \bullet t) \\ Y &= (a + x(t)) \bullet \sin(\Omega \bullet t) \end{aligned}\right\}$$ => (la distance(ou a+x))^2 = $X^2 + Y^2$ => $V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$

$$\overrightarrow{OM} = X(t) \bullet \vec{i} + Y(t) \bullet \vec{i}$$

$$x = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{X}(t) \bullet \vec{i} + \dot{Y}(t) \bullet \vec{i}$$

$$V^2 = \vec{V} \bullet \vec{V} = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

Exercice 24 janvier 2004

faire les dérivés :

$(U \bullet V)' = U' \bullet V + U \bullet V' \Rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x} \bullet \cos(\Omega \bullet t) - \Omega \bullet (a + x) \bullet \sin(\Omega \bullet t)$

$$\dot{Y} = \dot{x} \bullet \sin(\Omega \bullet t) - \Omega \bullet (a + x) \bullet \cos(\Omega \bullet t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{X}^2 = \left(\dot{x} \bullet \cos(\Omega \bullet t) - \Omega \bullet (a + x) \bullet \sin(\Omega \bullet t)\right)^2$$

$$+ \quad \dot{Y}^2 = \left(\dot{x} \bullet \sin(\Omega \bullet t) - \Omega \bullet (a + x) \bullet \cos(\Omega \bullet t)\right)^2$$

$$\left(\dot{x} \bullet \sin(\Omega \bullet t)\right)^2 + \left(\dot{x} \bullet \cos(\Omega \bullet t)\right)^2 + \left(\left(\Omega \bullet (a + x) \bullet \sin(\Omega \bullet t)\right)\right)^2 + \left(\left(\Omega \bullet (a + x) \bullet \cos(\Omega \bullet t)\right)\right)^2$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ d'où :

$\boxed{V^2 = \dot{x}^2 + \Omega^2 \bullet (a + x)^2}$ vitesse absolue

La masse va intervenir dans l'énergie cinétique.
Le ressort va intervenir dans l'énergie potentiel.

Energie potentiel :

$V(\{q\}) = \frac{1}{2} \bullet \{q\}^t \bullet [K] \bullet \{q\} \quad \to \quad V = \frac{1}{2} \bullet k \bullet x^2 \quad T = \frac{1}{2} \bullet m \bullet v^2$

Energie cinétique :

$$= \frac{1}{2} \bullet m \bullet v^2$$

$$T = \frac{1}{2} \bullet m \bullet v^2 = \frac{1}{2} \bullet m \bullet \left[\dot{x}^2 + \Omega^2 \bullet (a + x)^2\right]$$

$$T = T_0(q_1, t) + T_1(q_1, \dot{q}) + T_2(\dot{q})$$

quadratique en $\dot{q}$

de degré 1

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

Exercice 24 janvier 2004

Par identification :

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \bullet m \bullet \dot{x}^2}_{T_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \bullet m \bullet \Omega^2 \bullet (a+x)^2}_{T_0}$$

avec :

$T_0 = \frac{1}{2} \bullet m \bullet \Omega^2 \bullet (a+x)^2$ énergie cinétique d'entraînement

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} \bullet m \bullet \dot{x}^2$ énergie cinétique relative

3°) En équilibre, => $\frac{\partial V^*}{\partial q} = 0$, $V^* = V - T_0$ (énergie potentiel effective)

$$V^* = V - T_0 \;=>\; V^* = \frac{1}{2} \bullet k \bullet x^2 - \frac{1}{2} \bullet m \bullet \Omega^2 \bullet (a+x)^2$$

$$0 = \partial V^* / \partial x = \frac{\partial\left(\cancel{\frac{1}{2}} \bullet k \bullet x^2 - \cancel{\frac{1}{2}} \bullet m \bullet \Omega^2 \bullet (a+x)^2\right)}{\partial x} = (\cancel{2} \bullet k \bullet x) - (\cancel{2} \bullet m \bullet \Omega^2 \bullet (a+x)$$

$$0 = (k - m \bullet \Omega^2) \bullet x - m \bullet \Omega^2 \bullet a$$

$$=> x = \frac{m \bullet \Omega^2 \bullet a}{k - m \bullet \Omega^2}$$

Le système est instable lorsque :

$k - m \bullet \Omega^2 = 0$ (x tend vers ∞) =>$\Omega^2 = \frac{k}{m}$ ω^2, ω : pulsation propre du système.

Au voisinage de 0 :
Etudions la dérivé :

$$\frac{\partial V^*}{\partial x} = (k - m \bullet \Omega^2) \bullet x - m \bullet \Omega^2 \bullet a \;=>\; \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^2} = k - m \bullet \Omega^2$$

si $k - m \bullet \Omega^2 > 0$ => k > $m \bullet \Omega^2$ => $\frac{k}{m} > \Omega^2$ => $x_{eq} > 0$ équilibre stable

si $k - m \bullet \Omega^2 < 0$ => k < $m \bullet \Omega^2$ => $\frac{k}{m} < \Omega^2$ => $x_{eq} < 0$ équilibre instable

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr