On considère le système conservatif à 2 degrés de liberté l'équation de mouvement :

$$[M]\bullet\left\{\ddot{Q}\right\}+[K]\bullet\{Q\}=\{F\} \text{ avec } M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bullet i \text{ et } K=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}\bullet i$$

$$\{F(t)\}=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\bullet \sin 3t \qquad \text{(système S.I.)}$$

Le modèle modal correspondant est le suivant :

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, \omega_2=3 \text{ (en rad/s)}$$

$$\left\{\varphi^{(1)}\right\}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}, \left\{\varphi^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$$

Donner la solution temporelle par superposition modale de ce système sachant qu'il est à état repos à t = 0

Système conservatif (sans amortissement) => $\psi=\phi$

Masse généralisé m_l :

$[\phi]^t\bullet[M]\bullet[\phi]$ en fonction de chaque mode :

$$1=1 : \left[\varphi^{(1)}\right]^t\bullet[M]\bullet\left[\varphi^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}^t\bullet\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=6=m_1$$

$$1=2 : \left[\varphi^{(2)}\right]^t\bullet[M]\bullet\left[\varphi^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}^t\bullet\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=2=m_2$$

(voir page 14, diap 27)

Condition initiale = 0 => $Q_0=0$ et $\dot{Q}_0=0$

variable

$$\{Q(t)\}=\sum_{l=1}^{2}\int_0^t\frac{\left\{\varphi^{(l)}\right\}\bullet\left\{\varphi^{(l)}\right\}^t}{m_l\bullet\omega_l}\bullet\sin\omega_l(t-\tau)\bullet\{F(\tau)\}\bullet d\tau$$

Avec $[\phi]^t\bullet[M]\bullet[\phi]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^t\bullet\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=diag(m_l)$

Et $\{F(t)\}=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\bullet\sin 3t$

$$\{Q(t)\}=\sum_{l=1}^{2}\int_0^t\frac{\left\{\varphi^{(l)}\right\}\bullet\left\{\varphi^{(l)}\right\}^t}{m_l\bullet\omega_l}\bullet\sin\omega_l(t-\tau)\bullet\sin 3\tau\bullet\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\bullet d\tau$$

$$\{Q(t)\}=\sum_{l=1}^{2}\frac{\left\{\varphi^{(l)}\right\}\bullet\left\{\varphi^{(l)}\right\}^t}{m_l\bullet\omega_l}\bullet\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\bullet\int_0^t\underbrace{\sin\omega_l(t-\tau)}_{a}\bullet\underbrace{\sin 3\tau}_{b}\bullet d\tau$$

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

Exercice de dynamique du 13 février 2004

$$
\begin{array}{ll}
 & \cos(a+b) = \cos a \bullet \cos b - \sin a \bullet \sin b \\
+ & \cos(a-b) = \cos a \bullet \cos b + \sin a \bullet \sin b \\
\hline
= & 2 \bullet \sin a \bullet \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \\
= & \boxed{\sin a \bullet \sin b = \frac{1}{2} \bullet \left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)}
\end{array}
$$

d'où,

$$\int_0^t \sin \omega_l (t-\tau) \bullet \sin 3\tau \bullet d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \cos((\omega_l \bullet (t-\tau)) - (3 \bullet \tau)) - \cos((\omega_l \bullet (t-\tau)) + (3 \bullet \tau))$$

pour mode :

$$l = 1 \quad \left[\varphi^{(1)}\right] \bullet \left[\varphi^{(1)}\right]^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^t \bullet \langle 1 \quad 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\varphi^{(1)}\right] \bullet \left[\varphi^{(1)}\right]^t \bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

force

$$l = 2 \quad \left[\varphi^{(2)}\right] \bullet \left[\varphi^{(2)}\right]^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^t \bullet \langle 1 \quad -1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\varphi^{(2)}\right] \bullet \left[\varphi^{(2)}\right]^t \bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

seul le mode 2 sera considéré :

$$\{Q(t)\} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}}{2 \bullet 3} \bullet \int_0^t \sin \omega_l (t-\tau) \bullet \sin 3\tau \bullet d\tau = \frac{1}{3} \bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \bullet \int_0^t \sin \omega_l (t-\tau) \bullet \sin 3\tau \bullet d\tau$$

$$\int_0^t \sin \omega_2 (t-\tau) \bullet \sin 3\tau \bullet d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \cos((3 \bullet (t-\tau)) - (3 \bullet \tau)) - \cos((3 \bullet (t-\tau)) + (3 \bullet \tau))$$

$$\frac{1}{2} \bullet \left[\int_0^t \cos((3 \bullet (t-\tau)) - (3 \bullet \tau)) - \cos((3 \bullet (t-\tau)) + (3 \bullet \tau))\right] = \frac{1}{2} \bullet \left[\int_0^t \cos(3 \bullet t - 6 \bullet \tau) - \cos(3 \bullet t)\right]$$

$$\frac{1}{2} \bullet \left[\left[-\frac{\sin(3 \bullet t - 6 \bullet \tau)}{6}\right]_0^t - \left[\tau \bullet \cos(3 \bullet t)\right]_0^t\right] = \frac{1}{2} \bullet \left[\frac{\sin 3t}{3} - t \bullet \cos(3 \bullet t)\right]$$

(sin(-a) = -sin a)

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

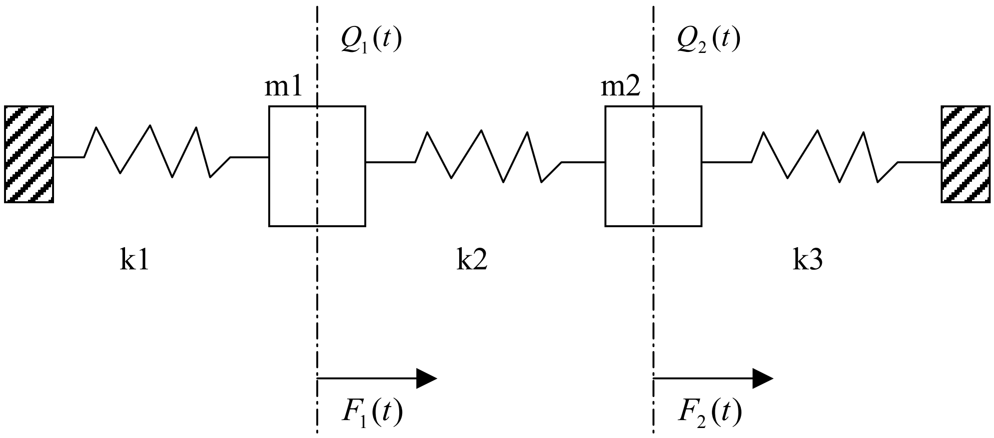
$$\int_0^t \sin\omega_l(t-\tau)\bullet\sin 3\tau\bullet d\tau = \frac{1}{2}\bullet\left[\frac{\sin 3t}{3} - t\bullet\cos(3\bullet t)\right]$$

$$\frac{1}{2}\bullet\left[-\sin 3t - \sin 3t - t\bullet\cos(3\bullet t)\right] = -\sin 3t - \frac{t}{2}\bullet\cos(3t)$$

d'où: pour le mode $l = 2$ (mode 1 : Q(t) = 0)

$$\boxed{\{Q(t)\} = \frac{1}{6}\bullet\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}\bullet\left[\frac{1}{3}\bullet\sin 3t - t\bullet\cos(3t)\right]}$$

Exercice :
Une structure à 2 degrés de liberté est modélisée par le système suivant :



m1 = m2 = 1kg k1 = k3 = 0,4 MN/M k2 = 0,819 MN/M

1) Ecrire les équations de mouvements
2) On considère les vibrations forcées en système avec :
F $_k = f_k \bullet e^{j\bullet\omega\bullet t}$ j(k = 1, 2) et la réponse harmonique du système : $Q_i = q_i \bullet e^{j\bullet\omega\bullet t}$
(i = 1,2)
   a) déterminer la matrice d'admittance $[A(\omega)]$ en fonction de k1, k2, k3, m1, m2, ω.
   b) Donner les valeurs numérique des éléments A_{ik} de cette matrice
   c) Exprimer les q_i à l'aide de f_k et de ω
   d) Que deviennent q_1 et q_2 lorsque ω est proche de :
   i) $\sqrt{3}\bullet 10^3$ rad/s
   ii) $\sqrt{0{,}4}\bullet 10^3$ rad/s

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

a) Exprimer l'énergie potentiel et l'énergie cinétique à partir du schéma ci-dessus :

L'énergie potentiel :

$$V=\frac{1}{2}\bullet k_1\bullet Q_1^2+\frac{1}{2}\bullet k_2\bullet (Q_2-Q_1)^2+\frac{1}{2}\bullet k_3\bullet Q_2^2$$

L'énergie cinétique :

$$T=\frac{1}{2}\bullet m_1\bullet \dot{Q}_1^2+\frac{1}{2}\bullet m_2\bullet \dot{Q}_2^2$$

Equation de LAGRANGE : (page 9)

$$\frac{d}{dt}\bullet\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_1}\right)+\frac{\partial V}{\partial Q_1}=F_1 \quad (1) \Rightarrow m_1\bullet \ddot{Q}_1+k_1\bullet Q_1-k_2\bullet (Q_2-Q_1)=F_1$$

$$m_1\bullet \ddot{Q}_1+(k_1+k_2)\bullet Q_1-k_2\bullet Q_2=F_1$$

$$\frac{d}{dt}\bullet\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_2}\right)+\frac{\partial V}{\partial Q_2}=F_2 \quad (2) \Rightarrow m_2\bullet \ddot{Q}_2+k_3\bullet Q_2+k_2\bullet (Q_2-Q_1)=F_2$$

$$m_2\bullet \ddot{Q}_2+k_3\bullet Q_2+k_2\bullet (Q_2-Q_1)=F_2=m_2\bullet \ddot{Q}_2+(k_3+k_2)\bullet Q_2-k_2\bullet Q_1$$

Regroupons et écrivons sous forme matricielle les équations (1) et (2) :

$$\boxed{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3+k_2 \end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}}$$

Avec : $\boxed{[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix}}$ $\boxed{[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}$

$$Q_i=q_i\bullet e^{j\bullet\omega\bullet t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\bullet Q_i=\dot{Q}_i=j\bullet\omega\bullet q_i\bullet e^{j\bullet\omega\bullet t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\bullet\dot{Q}_i=\ddot{Q}_i=-\omega^2\bullet q_i\bullet e^{j\bullet\omega\bullet t}$$

d'où en remplaçant Q par q et F par f :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\bullet(-\omega^2\bullet e^{j\omega t})\bullet\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3+k_2 \end{bmatrix}\bullet e^{j\omega t}\bullet\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=e^{j\omega t}\bullet\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

En simplifiant en divisant par $e^{j\omega t}$:

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

$$\boxed{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \bullet (-\omega^2) \bullet \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}$$

ou

$$\left(\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \bullet (-\omega^2) + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \right) \bullet \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

b) écrie sous la forme d'une équation de transfert : $\{q\} = [A(\omega) \bullet \{f\}]$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \bullet \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2 \bullet \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}$$

Rappel :
inverse d'une matrice :

1) transposé la matrice // * la diagonale
2) faire la matrice des cofacteurs (comatrice)
3) diviser par le déterminant
4) d'où :

$$A(\omega) = \frac{1}{[K] - \omega^2 \bullet [M]} \bullet \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_2 \bullet \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_1 \bullet \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

(matrice symétrique)

$q_1 = A_{11} \bullet f_1 + A_{12} \bullet f_2$ si f2 = 0 en excitant f1 => $q_1 = A_{11} \bullet f_1 \Rightarrow A_{11} = \dfrac{q_1}{f_1}$

$q_2 = A_{21} \bullet f_1 + A_{22} \bullet f_2$ si f1 = 0 en excitant f2 => $q_2 = A_{22} \bullet f_2 \Rightarrow A_{22} = \dfrac{q_2}{f_2}$

En mesurant le déplacement q1

f1 = 0 => $q_1 = A_{12} \bullet f_2 \Rightarrow A_{12} = \dfrac{q_1}{f_2}$

En mesurant le déplacement q2

f2 = 0 => $q_2 = A_{12} \bullet f_2 \Rightarrow A_{12} = \dfrac{q_1}{f_2}$

=> $\boxed{\dfrac{q_1}{f_2} = \dfrac{q_2}{f_1}}$

Remplacer par les valeurs numériques

c) déterminant :

$$\det[K] - \omega^2 \bullet [M] = \begin{bmatrix} 1{,}2 \bullet 10^6 - \omega^2 & -0{,}8 \bullet 10^6 \\ -0{,}8 \bullet 10^6 & 1{,}2 \bullet 10^6 - \omega^2 \end{bmatrix} = \omega^4 - 2{,}4 \bullet 10^6 \bullet \omega^2 + (1{,}2^2 - 0{,}8^2) \bullet 10^{12}$$

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

Exercice de dynamique du 13 février 2004

rappel : $a \bullet x^2 + b \bullet x + c \quad \Delta = b^2 - 4 \bullet a \bullet c$ => $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \bullet a}$

$\Delta = (-2{,}4 \bullet 10^6)^2 - 4 \bullet 0{,}8 \bullet 10^{12} = 5{,}76 \bullet 10^{-12} - 3{,}2 \bullet 10^{12} = 2{,}56 \bullet 10^{12}$

$\dfrac{2{,}4 \bullet 10^6 \pm 1{,}6 \bullet 10^6}{2}$ => $X_1 = 0{,}4 \bullet 10^6 \quad X_2 = 2 \bullet 10^6$

d'où : $[K] - \omega^2 \bullet [M] = (\omega^2 - 0{,}4 \bullet 10^6) \bullet (\omega^2 - 2 \bullet 10^6)$

Valeur propre de ω
=
valeurs qui annulent le déterminant

$\Downarrow$

$\omega_1 = \sqrt{0{,}4 \bullet 10^3}\, rad/s$

et

$\omega_2 = \sqrt{2} \bullet 10^3\, rad/s$

vecteur propre : (2 racines => 2 degrés de liberté => 2 composantes)

remplacer ω^2 par la valeur de la première racine X_1 :

$$\det[K] - \omega^2 \bullet [M] = \begin{bmatrix} 1{,}2 \bullet 10^6 - 0{,}4 \bullet 10^6 & -0{,}8 \bullet 10^6 \\ -0{,}8 \bullet 10^6 & 1{,}2 \bullet 10^6 - 0{,}4 \bullet 10^6 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = 0$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0{,}8 \bullet 10^6 & -0{,}8 \bullet 10^6 \\ -0{,}8 \bullet 10^6 & 0{,}8 \bullet 10^6 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} x_{11} - x_{12} &= 0 \\ -x_{11} + x_{12} &= 0 \end{aligned}$$ première équation « moins » la deuxième => $x_{11} = x_{12}$

$$\Rightarrow \{x_{11}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \varphi(1) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

remplacer ω^2 par la valeur de la première racine X_2 :

$$\det[K] - \omega^2 \bullet [M] = \begin{bmatrix} 1{,}2 \bullet 10^6 - 2 \bullet 10^6 & -0{,}8 \bullet 10^6 \\ -0{,}8 \bullet 10^6 & 1{,}2 \bullet 10^6 - 2 \bullet 10^6 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$0 = \begin{bmatrix} -0{,}8 \bullet 10^6 & -0{,}8 \bullet 10^6 \\ -0{,}8 \bullet 10^6 & -0{,}8 \bullet 10^6 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -x_{11} - x_{12} &= 0 \\ -x_{11} - x_{12} &= 0 \end{aligned}$$ première équation « plus » la deuxième => $x_{21} = -x_{22}$

$$\Rightarrow \{x_{22}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \varphi(2) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\varphi^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \qquad \boxed{\varphi = \{\varphi^{(1)}, \ \varphi^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}}$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = [diag(m_l)] = [\Phi]^t \bullet [M] \bullet [\Phi]$$

$$[\phi]^t \bullet [M] \bullet [\phi] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

L'admittance pour un système conservatif non gyroscopique : (page 21 diap. 42)

résidu

$$[A(\omega)] = \sum_{l=1}^{n} \frac{\{\varphi^{(l)}\} \bullet \{\Psi^{(l)}\}^t}{m_l \bullet (\omega_l^2 - \omega^2)}$$

pôle

$$\boxed{q_i = A_{ik} \bullet f_k}$$

$$\boxed{A_{ik} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\{\varphi_{il}^{(l)}\} \bullet \{\varphi_{il}^{(l)}\}}{m_l \bullet (\omega_l^2 - \omega^2)}} \Rightarrow \quad A_{11} = A_{22} = \overbrace{\frac{\varphi_{11}^2}{m_1 \bullet (\omega_1^2 - \omega^2)}}^{l=1} + \overbrace{\frac{\varphi_{12}^2}{m_2 \bullet (\omega_2^2 - \omega^2)}}^{l=2}$$

Pour i = 1 et k = 1

$$\boxed{\left.\begin{matrix} m_1 = m_2 \\ \text{et} \\ k_1 = k_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad A_{11} = A_{22}}$$

$$A_{11} = A_{22} = \frac{0{,}5}{(0{,}4 \bullet 10^6 - \omega^2)} + \frac{0{,}5}{(2 \bullet 10^6 - \omega^2)}$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{\varphi_{11} \bullet \varphi_{21}}{m_1 \bullet (\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{\varphi_{12} \bullet \varphi_{22}}{m_2 \bullet (\omega_2^2 - \omega^2)}$$

Pour i = 1 et k = 2

$$A_{12} = A_{21} = \frac{0{,}5}{(0{,}4 \bullet 10^6 - \omega^2)} - \frac{0{,}5}{(2 \bullet 10^6 - \omega^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \bullet f_1 + & A_{12} \bullet f_2 \\ A_{12} \bullet f_1 + & A_{11} \bullet f_2 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4 \bullet 10^6 - \omega^2)} + \frac{0{,}5}{(2 \bullet 10^6 - \omega^2)} \right) \bullet f_1 + \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4 \bullet 10^6 - \omega^2)} - \frac{0{,}5}{(2 \bullet 10^6 - \omega^2)} \right) \bullet f_2$$

$$\boxed{q_1 = \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4 \bullet 10^6 - \omega^2)} \right) \bullet (f_1 + f_2) + \left(\frac{0{,}5}{(2 \bullet 10^6 - \omega^2)} \right) \bullet (f_1 - f_2)}$$

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS

$$q_2 = \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)} - \frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet f_1 + \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)} + \frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet f_2$$

$$\boxed{q_2 = \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet (f_1 + f_2) - \left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet (f_1 - f_2)}$$

ii) $\omega^2 \approx 2\bullet 10^6\, rad/s \Rightarrow \left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right) >> \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)$

d'où

$\left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)$ est négligeable,

et

$$q_1 \approx \left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet (f_1 - f_2) = \left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$q_2 \approx -\left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet (f_1 - f_2)$$

d'où

$q_1 \approx -q_2$, excitation 2ème mode à cette pulsation (ω_2)

i) $\omega^2 \approx 0{,}4\bullet 10^6\, rad/s \Rightarrow \left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right) << \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)$

d'où

$\left(\frac{0{,}5}{(2\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)$ est négligeable,

et

$$q_2 \approx q_1 \approx \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet (f_1 + f_2) = \left(\frac{0{,}5}{(0{,}4\bullet 10^6 - \omega^2)}\right)\bullet \begin{Bmatrix} 1 \\ +1 \end{Bmatrix}^t \bullet \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

à cette pulsation (ω_1) excitation 1er mode

<u>Conclusion</u>

1er mode $q_2 \approx q_1$, les masses se déplacent dans le même sens,

2ème mode $q_2 \approx -q_1$ les masses se déplacent dans le sens contraire.

jmbaes@free.fr
Jean-Michel BAËS