Dynamique, exo du 30/1/2004

Exercice :
Une modélisation linéaire d'un système à 2 degrés de liberté a fourni

Les matrices de masse : $[M]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

de raideur : $[K]=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ (en S.I.)

1°) Calculer les pulsations propres du système ω_1, ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$
2°) Déterminer les vecteurs de forme correspondants $\{x_1\} et \{x_2\}$
3°) Par la suite, pour améliorer le modèle on ajoute un amortissement proportionnel de facteurs $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\varepsilon_2 = -\frac{1}{3}$, respectivement dans le premier et deuxième mode :
Calculer la matrice d'amortissement $[D]$ comme combinaison linéaire de $[M]$ et $[K]$

4°)Calculer les matrices de masse, raideur et amortissement généralisées

Solution :

Pas d'amortissement :
$S_l = j \bullet \omega_l \Rightarrow S_l^{\,2} = -\omega_l^{\,2}$
(page 3 diap 5) et(page 6 diap 11)

1°) Trouver ω tel que : $\det\left([K] - \omega^2 \bullet [M]\right) = 0$

$$\begin{bmatrix}5-2\bullet\omega^2 & -4-\omega^2\\ -4-\omega^2 & 5-2\bullet\omega^2\end{bmatrix} = 0 \quad \left(5-2\bullet\omega^2\right)^2 - \left(-4-\omega^2\right)^2$$

$$\left(5-2\bullet\omega^2\right) + \left(-4-\omega^2\right) = 0 \Rightarrow 1-3\bullet\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\left(5-2\bullet\omega^2\right) - \left(-4-\omega^2\right) = 0 \Rightarrow 9-\bullet\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 9 \Rightarrow \omega = 3$$

2°) $\left([K] - \omega^2 \bullet [M]\right) \bullet \{X\} = \{0\}$
$\omega^2 = \omega_1^2 \rightarrow \{x_1\}$
$\omega^2 = \omega_2^2 \rightarrow \{x_2\}$

$$\begin{bmatrix}5-2\bullet\omega^2 & -4-\omega^2\\ -4-\omega^2 & 5-2\bullet\omega^2\end{bmatrix} \Rightarrow \text{pour } \omega_1^{\,2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix}5-\frac{2}{3} & -4-\frac{1}{3}\\ -4-\frac{1}{3} & 5-2\bullet\frac{1}{3}\end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{13}{3} & -\frac{13}{3}\\ -\frac{13}{3} & \frac{13}{3}\end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{13}{3} \bullet \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x_{11}-x_{12}\\ -x_{11}+x_{12}\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Première équation moins la deuxième $\Rightarrow 2\bullet x_{11} - 2\bullet x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = x_{12}$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix}x_{11}\\x_{12}\end{Bmatrix} \Rightarrow \{x_{11}\}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \Rightarrow \varphi(1)=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

$$\omega^2=\omega_2^2 \rightarrow \{x_2\}$$

$$\begin{bmatrix}5-2\bullet\omega^2 & -4-\omega^2\\ -4-\omega^2 & 5-2\bullet\omega^2\end{bmatrix} \Rightarrow \text{pour } \omega_2{}^2=9 \Rightarrow \begin{bmatrix}5-18 & -4-9\\ -4-9 & 5-2\bullet 9\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}x_{21}\\x_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-13 & -13\\ -13 & -13\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}x_{21}\\x_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow 13\bullet\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}x_{21}\\x_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-x_{11}-x_{12}\\ -x_{11}-x_{12}\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

équation identique $\Rightarrow x_{11}=-x_{12}$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix}x_{21}\\-x_{22}\end{Bmatrix} \Rightarrow \{x_{22}\}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix} \Rightarrow \varphi(2)=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

Matrice modale : $[\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$\dots\dots\dots\varphi_{(1)} \quad \varphi_{(2)}$

3°) $[D]=\alpha\bullet[M]+\beta\bullet[K]$, α,β?

Matrice d'amortissement : $[D]$

Matrice de masse: $[M]$

Matrice de raideur :'amortissement : $[K]$

Données : $\omega_1^2,\quad \omega_2^2$ *pulsations propres*

$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2$ *facteurs de proportionnalité d'amortissement*

(voir page 8 diap 15)

$$\alpha\bullet m_l+\beta\bullet m_l\bullet\omega_l^2=2\bullet\varepsilon_l\bullet m_l\bullet\omega_l$$

avec simplification par m_l

$$\Rightarrow \alpha+\beta\bullet\omega_l^2=2\bullet\varepsilon_l\bullet\omega_l$$

l étant le nombre de mode :

$l=1 \Rightarrow \alpha+\beta\bullet\omega_1^2=2\bullet\varepsilon_1\bullet\omega_1$ (1)

$l=2 \Rightarrow \alpha+\beta\bullet\omega_2^2=2\bullet\varepsilon_2\bullet\omega_2$ (2)

a) trouver β : faire (2) – (1) :

$$\beta\bullet(\omega_2^2-\omega_1^2)=2\bullet(\varepsilon_2\bullet\omega_2-\varepsilon_1\bullet\omega_1) \Rightarrow \boxed{\beta=\frac{2\bullet(\varepsilon_2\bullet\omega_2-\varepsilon_1\bullet\omega_1)}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}}$$

b) trouver α : remplacer β par sa valeur dans l' équation 1) :

$$\alpha=2\bullet\varepsilon_1\bullet\omega_1-\omega_1^2\bullet\frac{2\bullet(\varepsilon_2\bullet\omega_2-\varepsilon_1\bullet\omega_1)}{(\omega_2^2-\omega_1^2)} \Rightarrow \boxed{\alpha=2\bullet\omega_1\bullet\omega_2\bullet\frac{(\varepsilon_1\bullet\omega_2-\varepsilon_2\bullet\omega_1)}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}}$$

application numérique :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \omega_2 = 3 \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{3}$$

d'où $\beta = \dfrac{2 \bullet \frac{1}{3} \bullet 3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{9 - \frac{1}{3}} = \dfrac{2}{13}$, $\alpha = 2 \bullet \dfrac{1}{\sqrt{3}} \bullet \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{13} \bullet \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{13}$

D'où : $[D] = \dfrac{8}{13} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \dfrac{2}{13} \bullet \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0]$

3°) calculer la matrice généralisée :

<u>les matrices M, K, sont symétriques d'où</u> : $\left\{\psi^{(l)}\right\}^t = \left\{\phi^{(l)}\right\}$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = [diag(m_l)] = [\Phi]^t \bullet [M] \bullet [\Phi]$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l \bullet \omega_l^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = [diag(m_l \bullet \omega_l^2)] = [\Phi]^t \bullet [K] \bullet [\Phi]$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2 \bullet m_l \bullet \varepsilon_l \bullet \omega_l^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = [diag(2 \bullet m_l \bullet \varepsilon_l \bullet \omega_l^2)] = [\Phi]^t \bullet [D] \bullet [\Phi]$$

D'où,

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \left\{\varphi^{(l)\,t}\right\} \bullet [M] \bullet \left\{\varphi^{(l)}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l \bullet \omega_l^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \left\{\varphi^{(l)\,t}\right\} \bullet [K] \bullet \left\{\varphi^{(l)}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2 \bullet m_l \bullet \varepsilon_l \bullet \omega_l^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \left\{\varphi^{(l)\,t}\right\} \bullet [D] \bullet \left\{\varphi^{(l)}\right\}$$

$l = 1, 2$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_l \bullet \omega_l^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2 \bullet m_l \bullet \varepsilon_l \bullet \omega_l^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr