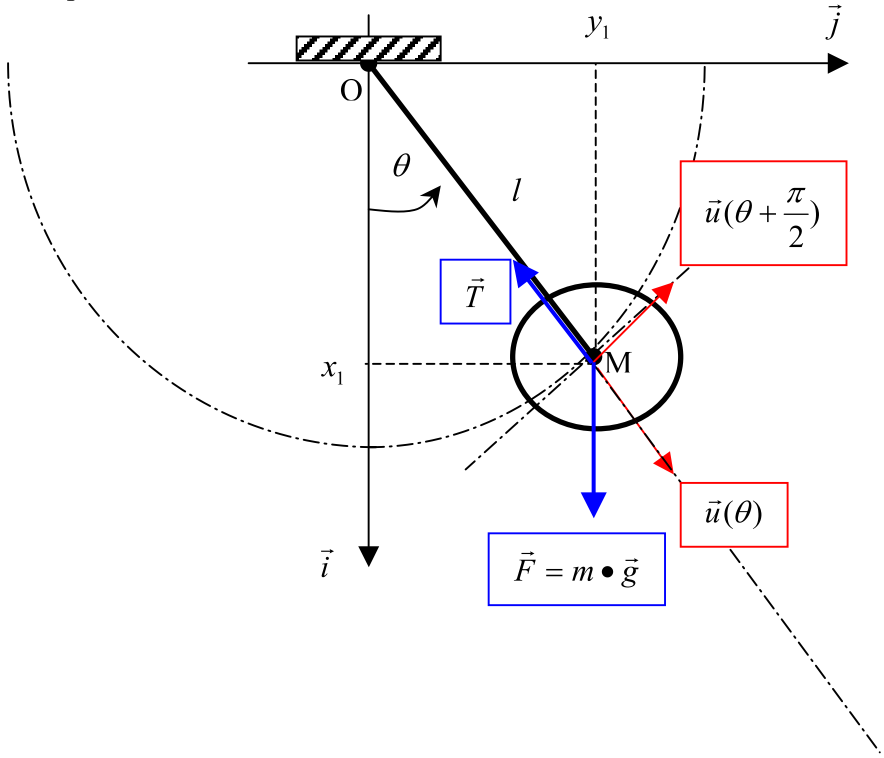
17 Janvier 2004 cours dynamique :



Le pendule :

1) Définir un système de coordonnées physiques
2) Montrez que ces coordonnées ne sont pas indépendantes
3) En déduire un système de coordonnées généralisées

1) (x_1, y_1) système de coordonnées physiques

2) $x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = l^2$

3) $\left.\begin{array}{l}\text{2 variables généralisées}\\ \text{1 liaison}\end{array}\right\}$ => angle

On choisit l'angle θ avec : $x_1 = l \bullet \cos\theta$

$y_1 = l \bullet \sin\theta$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

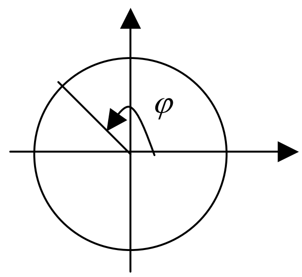
4) Ecrire l'équation de mouvement avec les lois de NEWTON du pendule :

$\overrightarrow{OM} = l \bullet \vec{u}(\theta)$ (distance)

$\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = l \bullet \dfrac{d\vec{u}(\theta)}{dt} = l \bullet \dfrac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} \bullet \dfrac{d\theta}{dt} = l \bullet \dot{\theta} \bullet \dfrac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta}$ (vitesse)

$\vec{\Gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d}{dt} \bullet (\theta + \dfrac{\pi}{2})$ (accélération)

<u>avec l'équation de mouvement</u> : $\vec{T} + m \bullet \vec{g} = m \bullet \vec{\Gamma}$



Pour dérivé le sin ou le cos de φ, ajouter $\dfrac{\pi}{2}$ à l'angle φ dans le sens des aiguille d'une montre et lire respectivement le cos ou le sin du nouvel angle.

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta \bullet \vec{i} + \sin\theta \bullet \vec{j}$$

$$\vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta \bullet \vec{i} + \cos\theta \bullet \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta \bullet \vec{i} + \cos\theta \bullet \vec{j}$$

$$l \bullet \dot{\theta} \bullet \frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = l \bullet \dot{\theta} \bullet (-\sin\theta \bullet \vec{i} + \cos\theta \bullet \vec{j}) = l \bullet \dot{\theta} \bullet \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}$$

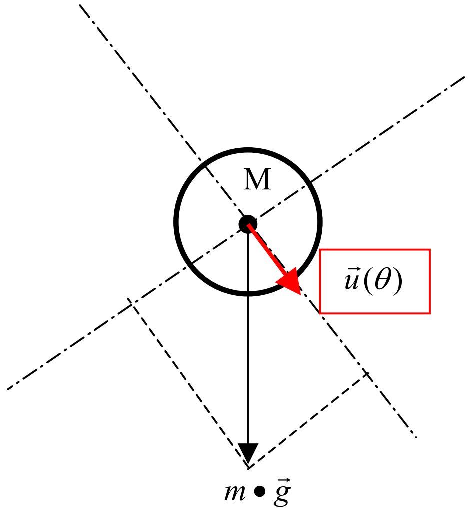
(y = u . v => y' = u' . v + u . v')

$$\vec{\Gamma} = l \bullet \left[\frac{d\dot{\theta}}{dt} \bullet \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) + \underbrace{\dot{\theta} \bullet \frac{d\vec{u}(\theta + \pi/2)}{dt}}_{\frac{d\vec{u}(\theta + \pi/2)}{d\theta} \bullet \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{(= \dot{\theta})}} \right] = l \bullet \ddot{\theta} \bullet \vec{u}(\theta + \pi/2) + l \bullet \dot{\theta}^2 \bullet \underbrace{\frac{d\vec{u}(\pi/2)}{d\theta}}_{= -\vec{u}(\theta)}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = l \bullet \ddot{\theta} \bullet \vec{u}(\theta + \pi/2) - l \bullet \dot{\theta}^2 \bullet \vec{u}(\theta)}$$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

$\vec{T} = -T \bullet \vec{u}$



$$m \bullet \vec{g} = m \bullet g \bullet \left(\cos\theta \bullet \vec{u}(\theta) - \sin\theta \bullet \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) \right)$$

$$\vec{T} + m \bullet \vec{g} = -T \bullet \vec{u} + m \bullet g \bullet \cos\theta \bullet \vec{u}(\theta) - m \bullet g \bullet \sin\theta \bullet \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) = ((m \bullet g \bullet \cos\theta) - T) \bullet \vec{u}(\theta) - m \bullet g \bullet \sin\theta \bullet \vec{u}(\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{T} + m \bullet \vec{g} = ((m \bullet g \bullet \cos\theta) - T) \bullet \vec{u}(\theta) - m \bullet g \bullet \sin\theta \bullet \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) = -m \bullet l \bullet \dot{\theta}^2 \bullet \vec{u}(\theta) + m \bullet l \bullet \dot{\theta}^2 \bullet \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$$

par identification :

$((m \bullet g \bullet \cos\theta) - T) = -m \bullet l \bullet \dot{\theta}^2$ => $\boxed{T = m \bullet (g \bullet \cos\theta + l \bullet \dot{\theta}^2)}$

$-\cancel{m} \bullet g \bullet \sin\theta = +\cancel{m} \bullet l \bullet \dot{\theta}^2$ => $\boxed{\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \bullet \sin\theta = 0}$

si $\sin\theta$ est faible => $\sin\theta \approx \theta$ d'où $\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \bullet \theta = 0$; posons $\omega^2 = \frac{g}{l}$ d'où $\boxed{\dot{\theta}^2 + \omega^2 \bullet \theta = 0}$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

5) retrouver les équations de mouvement par le théorème d'Hamilton
$(\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\bullet dt=0)$ avec T : énergie cinétique

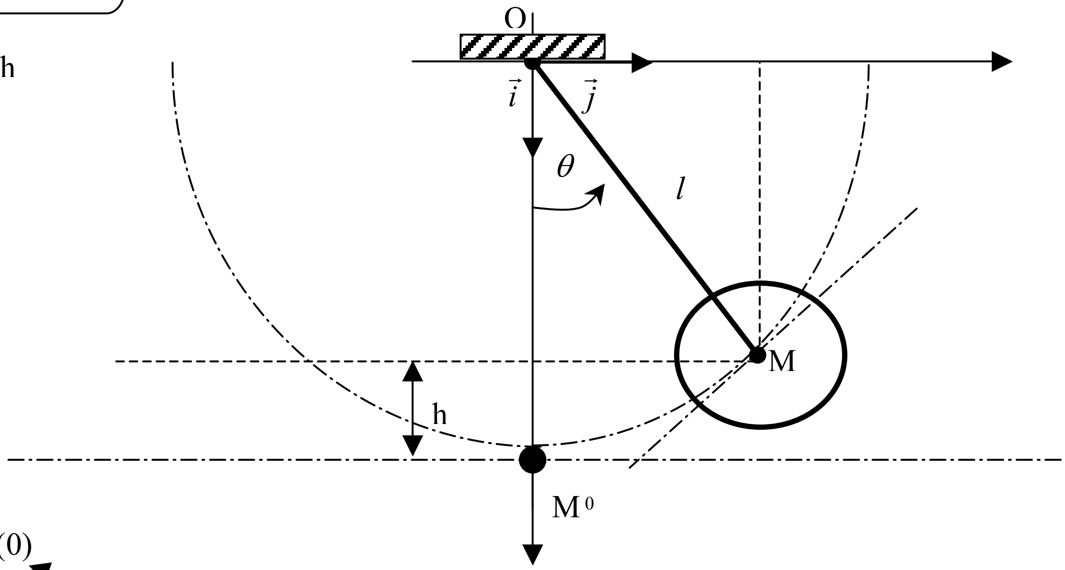
V : énergie potentiel

On dit aussi le Lagrangien L = T – V

$$T=\frac{1}{2}\bullet m\bullet\vec{V}\bullet\vec{V}=\frac{1}{2}\bullet m\bullet l\bullet\left(\dot{\theta}\bullet\vec{u}(\theta+\frac{\pi}{2})\right)^2=\frac{1}{2}\bullet m\bullet l^2\bullet\dot{\theta}^2\bullet\vec{u}(\theta+\frac{\pi}{2})\bullet\vec{u}(\theta+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\bullet m\bullet l^2\bullet\dot{\theta}^2\bullet 1$$

avec $\vec{V}=l\bullet\dot{\theta}\bullet\vec{u}(\theta+\frac{\pi}{2})$

$$V=m\bullet g\bullet\underbrace{(\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{OM})\bullet\vec{i}}_{h}$$



$\overrightarrow{OM_0}=l\bullet\vec{u}(0)$ $\theta=0$

$\overrightarrow{OM}=l\bullet\vec{u}(\theta)$ $\theta\neq 0$

$$V=m\bullet g\bullet(\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{OM})\bullet\vec{i}=m\bullet g\bullet(l\bullet\vec{i}-l\bullet\cos\theta\bullet\vec{i}-l\bullet\sin\theta\bullet\vec{j})\bullet\vec{i}$$ et $(\vec{i}\bullet\vec{j}=0)$

$$\boxed{V=m\bullet g\bullet l(1-\cos\theta)}$$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\bullet dt=0=\int_{t_1}^{t_2}\delta\bullet L\bullet dt=0$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}\bullet m\bullet l^2\bullet\dot{\theta}^2 - m\bullet g\bullet l\bullet(1-\cos\theta)$$

$$L = (\dot{\theta},\theta)$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\bullet\delta\dot{\theta}+\frac{\partial L}{\partial\theta}\bullet\delta\theta$$

dérivons L par rapport à θ

$$\delta L = \frac{1}{2}\bullet m\bullet l^2\bullet 2\bullet\dot{\theta}\bullet\delta\dot{\theta}-m\bullet g\bullet l\bullet\sin\theta\bullet\delta\theta \Rightarrow$$

$$L = m\bullet l^2\bullet\int_{t_1}^{t_2}\dot{\theta}\bullet\delta\dot{\theta}\bullet dt - m\bullet g\bullet l\bullet\int_{t_1}^{t_2}\sin\theta\bullet\delta\theta\bullet dt = 0$$

$$\int U\bullet V' = [U\bullet V]-\int U'\bullet V$$
$$\dot{\theta}=U\Rightarrow U'=\ddot{\theta}$$
$$\delta\dot{\theta}=V'\Leftarrow V=\delta\theta$$

supprimons $\dot{\theta}$ d'où intégration par parti :

$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{\theta}\bullet\delta\dot{\theta}\bullet dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\bullet\frac{d(\delta\theta)}{dt}\bullet dt=\underbrace{\cancel{[\theta\bullet\delta\theta]_{t_1}^{t_2}}}_{=0\text{ par définition}}-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\theta}\bullet\delta\theta\bullet dt \Rightarrow =-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\theta}\bullet\delta\theta\bullet dt$$

d'où :

$$L = m\bullet l^2\bullet\int_{t_1}^{t_2}\dot{\theta}\bullet\delta\dot{\theta}\bullet dt - m\bullet g\bullet l\bullet\int_{t_1}^{t_2}\sin\theta\bullet\delta\theta\bullet dt$$

$$L = -m\bullet l^2\bullet\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\theta}\bullet\delta\theta\bullet dt - m\bullet g\bullet l\bullet\int_{t_1}^{t_2}\sin\theta\bullet\delta\theta\bullet dt$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}(-m\bullet l^2\bullet\ddot{\theta}-m\bullet g\bullet l\bullet\sin\theta)\bullet\delta\theta\bullet dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\,\delta\theta\\ \delta\theta(t_1)=\delta\theta(t_2)=0\end{array}}$$

D'où, $-m\bullet l^2\bullet\ddot{\theta}-m\bullet g\bullet l\bullet\sin\theta=0\Rightarrow l^2\bullet\ddot{\theta}+g\bullet l\bullet\sin\theta=0$

$$\Rightarrow l\bullet\ddot{\theta}+g\bullet\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\bullet\sin\theta=0}$$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr

6) En utilisant les équations de Lagrange, retrouver cette équation de mouvement :

$$-\frac{d}{dt}\bullet\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)+\frac{\partial T}{\partial q}-\frac{\partial V}{\partial q}=0$$

avec $q=\theta$

$\boxed{T=\frac{1}{2}\bullet m\bullet l^2\bullet \dot{\theta}^2}$ (voir ci-dessus(5))

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=m\bullet l^2\bullet\dot{\theta}$ $\qquad$ $-\frac{d}{dt}\bullet\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=-m\bullet l^2\bullet\ddot{\theta}$

$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$

$\boxed{V=m\bullet g\bullet l(1-\cos\theta)}$ (voir ci-dessus (5))

$\frac{\partial V}{\partial \theta}=m\bullet g\bullet l\bullet\sin\theta$

D'où, $-m\bullet l^2\bullet\ddot{\theta}-m\bullet g\bullet l\bullet\sin\theta=0\Rightarrow l^2\bullet\ddot{\theta}+g\bullet l\bullet\sin\theta=0$ => $\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\bullet\sin\theta=0}$

$\Rightarrow l\bullet\ddot{\theta}+g\bullet\sin\theta=0$

Jean-Michel BAËS
jmbaes@free.fr