jmbaes@free.fr

Ex : 3 Algèbre linéaire :

E et F 2 ev sur $\mathbb{R}$ et f linéaire de E dans F base b : $\quad E \xrightarrow{f} F$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ Dim = 3 $\qquad$ Dim = 4

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3 \\ \vec{\varepsilon}_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{e})_1 & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{matrix} & \end{array}$$

Ker f = $\{\ \vec{v} \in / f(\vec{v}) = \vec{0}\ \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / A \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$= \ \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (2x + y - z) = 0, (x - 2y + 2z = 0), (4x + 5y - 7z = 0), (3y - 5z) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & = 0 \\ 1 & -2 & 2 & = 0 \\ 4 & 5 & -7 & = 0 \\ 0 & 3 & -5 & = 0 \end{pmatrix}$$

résolution rétrogradage subtitution

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \uparrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ 2 \bullet L_2 - L_1 \\ L_3 - 2 \bullet L_1 \\ \ \end{matrix}$$

X
2Y – X
Z – 2X
T

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array} \begin{matrix} L_1 \\ \ \\ 5 \bullet L_3 + 3 \bullet L_2 \\ 5 \bullet L_4 + 3 \bullet L_2 \end{matrix}$$

X
2Y – X
5Z – 7X – 6Y
5T - 6Y + 3X

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & \\ 0 & 0 & -10 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_4 - L_3 \end{array}$$

X
2Y – X
5Z – 7X – 6Y
5T + 10X – 5Z

2x + y – z = 0

-5y + 5z = 0 $\Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ d'où le noyau est le vecteur nul

-10z = 0

$$\text{Im f} = \{ \vec{w} \in F / \exists \vec{v} \in E f(\vec{v}) = \vec{w} \} = \{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} / \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \}$$

2x + y – z = X
x – 2y + 2z = Y
4x +5y – 7z = Z
3y – 5z = T
2x + y – z = X

-5y + 5z = 2Y – X $\Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ d'où le noyau est le vecteur nul

-10z = 5Z – 7X – 6Y

$\boxed{0 = 5T + 10X - 5Z}$ (S) possède au moins une solution (x, y, z) ssi 0 = 5T + 10X – 5Z

$$\text{Im f} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 0 = 5T + 10X - 5Z \} \Rightarrow \text{dim Im f} = 3$$ dim de E = dim noyau + dim image

Déterminant:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{5} & \overset{-}{6} \\ \overset{+}{7} & \overset{-}{8} & \overset{+}{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad L_2 - 4 \bullet L_1$$

ne pas multiplier ou diviser, ou si non mettre en facteur l'inverse de l'opération, de façon à garder l'égaliter.

jmbaes@free.fr

$$= 1 \bullet (-1) \bullet \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant mineur}} + 2 \bullet (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \bullet \underbrace{(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{\text{coffacteur}} = -3 - 2 \bullet (-6) + 3 \bullet (-3) = 0$$

ex :

matrice identité : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = $ a . b . c. d

Méthode de Cramer :

$2x + y - z = 1$
$x - y + 2z = 0$
$x + y + z = -1$

par la méthode de GAUSS :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \bullet L_2 - L_1 \\ 2 \bullet L_3 - L_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3 \bullet L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x + y - z = 1 \\ -3y + 5z = -1 \\ 14z = -10 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y - z = 1 \\ -3y - \frac{25}{7} = -1 \\ z = -\frac{5}{7} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - \frac{6}{7} + \frac{5}{7} = 1 \\ y = -\frac{6}{7} \\ z = -\frac{5}{7} \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{4}{7} \\ y = -\frac{6}{7} \\ z = -\frac{5}{7} \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & -1 & -3 \\ \overset{-}{1} & -2 & 1 \\ \overset{+}{1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -7 \quad \Delta \neq 0 \Rightarrow \text{il y a une solution.}$$

$$\begin{matrix} & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{7} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{7}$$

On remplace la première colonne par le second membre.

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{7} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \bullet \begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix} = -\frac{1}{7} \bullet (3 \bullet (2) = -\frac{6}{7}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{7} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \bullet (2+3) = -\frac{5}{7}$$

ax + y + z = 1
x + ay + z = a
x + y + az = a^2 si GAUSS :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a^2-1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} a \bullet L_2 - L_1 \quad \text{discussion si a = 0 et a} \neq 0$$

Méthode de Cramer :

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \underset{C_1 + C_2 + C_3}{\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{pmatrix}} = (a+2) \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = (a+2) \bullet \begin{matrix} 0 & 0 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{matrix} = (a+2) \bullet (a-1)^2$$

si a$\neq$ -1 et a $\neq$ 1 $\Delta \neq 0$ possède une solution unique

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a \\ a^2 & 1-a^2 & a-a^2 \end{pmatrix} = -(1-a) \bullet (1 - a^2) = -(1-a)((1-a)(1+a))$$

$$= -(a-1)^2 \bullet (a+1)$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a^2-a & a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - a \bullet L_2 \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix} = (a-1)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a^2-a \end{pmatrix} L_3 - L_2 \quad = a \bullet (a-1) \bullet (a-1) + (a-1)(a^2-1) =$$

$$a \bullet (a-1)^2 + (a-1)^2 \bullet (a+1) = (a-1)^2 \bullet (a+a+1) \qquad z = \frac{2a+1}{(a+2)}$$

$$z = \boxed{\frac{(a+1)^2}{a+2}} \ ?$$

si a = -2 $\Rightarrow$ *-2x + y + z = 1*
x – 2y + z = 2
x + y – 2z = 4

Gauss :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \bullet L_2 + L_1 \\ 2 \bullet L_3 + L_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} L_3 + L_2$$

-2x +y + z = 1
-3y + 3z = 5
0 = 14 **impossible !**

si a = 1 x+ y + z = 1 une équation 3 inconnus indéterminé, infinité de solution.
x + y + z = 1
x + y + z = 1

si $a \neq 1$ *et* $a \neq -2$ $\quad Y = \{ -\frac{(a+1)}{a+2}; \frac{1}{a+2}; \frac{(a+2)^2}{a+2} \}$

si a = 2 Y impossible

si a = 1 Y indéterminé

cohérence si a =1 $Y\ (\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3})$ *est une des solutions* $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$

2-4-2 calcul de l'inverse d'une matrice :

dim E = n B = $(\vec{e}_1, ...\vec{e}_n)$
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n$ est la base de E ssi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ libre.

$\lambda_1 \bullet \vec{v}_1 + \lambda_2 \bullet \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \bullet \vec{v}_n \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} & \vec{e}_1 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} & \vec{e}_n \\ \vec{v}_1 & & \vec{v}_n & \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1 = a_{11} \bullet \vec{e}_1 + a_{21} \bullet \vec{v}_2 + ... + a_{n1} \bullet \vec{e}_n$
$\vdots$
$\vec{v}_n = a_{1n} \bullet \vec{e}_1 + a_{2n} \bullet \vec{v}_2 + ... + a_{nn} \bullet \vec{e}_n$

$$\lambda_1 \bullet \quad (a_{1n} \bullet \vec{e}_1 + a_{2n} \bullet \vec{v}_2 + ... + a_{nn} \bullet \vec{e}_n) + ... \lambda_n \bullet (a_{1n} \bullet \vec{e}_1 + a_{2n} \bullet \vec{v}_2 + ... + a_{nn} \bullet \vec{e}_n) = \vec{0}$$
$$(a_{11} \bullet \lambda_1 .... + a_{1n} \bullet \lambda_n) \bullet \vec{e}_1 + ...(a_{n1} \bullet \lambda_n .... + a_{nn} \bullet \lambda_n) \bullet \vec{e}_n = \vec{0}$$

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{11}\bullet\lambda_1\ldots\ldots+a_{1n}\bullet\lambda_n=0 \\ \quad\quad\quad\vdots \\ a_{n1}\bullet\lambda_1\ldots\ldots+a_{nn}\bullet\lambda_n=0\end{array}\right. \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{n1}\ldots\ldots\ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

(S) possède une unique solution ssi det A $\neq 0$

Ex : dans $\mathbb{R}^3$

$\vec{v}_1=(1,2,1)$ $\quad\vec{v}_2=(1,1,0)$ $\quad\vec{v}_3=(4,0,5)$ Base de $\mathbb{R}^3$? faire le déterminant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -10 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}= -9 \qquad \text{det} \neq 0 \text{ c'est une base dans } \mathbb{R}^3$$

2-4-1

$A\bullet A^{-1} = A^{-1}\bullet A = I \qquad Y = A\bullet X \qquad A^{-1}\bullet Y = A^{-1}\bullet A\bullet X$
$\qquad = X$

$A^{-1} \quad = \dfrac{1}{\det A}$ vérifier si le déterminant non nul

faire la symétrie par rapport à la diagonale

${}^t\tilde{A}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\tilde{A}$ comatrice qui stock les coffacteurs

$$\text{ex } A=\begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{1} & \overset{-}{-1} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{-1} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1}\end{pmatrix}=\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix} = -7\neq 0 \text{ A est inversible}$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}=\tilde{A}$$

$A^{-1}\bullet A$ = matrice identité.

Ex avec la même matrice A

$$B = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

calcul B^{-1} vérifier $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

$A \times B \times B^{-1} \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I$

$B^{-1} \times A^{-1} \times A \times B = B^{-1} \times I \times B = B^{-1} \times B$

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$