Ex : $3^x = e^{x\ln 3}$

$$\boxed{U^v = e^{v\ln U}}$$

$1^\infty = e^{\infty \ln 1}$, $0^0 = e^{0\ln 0} = e^{0(-\infty)}$ $(+\infty)^0 = e^{0\ln\infty} = e^{0\infty}$, $0^\infty = e^{\infty\ln 0} = e^{+\infty(-\infty)}$

Exercice 1 de fonctions d'une variable réelle. Développements limités :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}}$$

$\ln(1+h) \sim h$ $h \to 0$

$\ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$ $x \to +\infty$

$x\ln(1+\frac{1}{x}) \sim x\frac{1}{x}$ $x \to +\infty$

$\lim x\ln(1+\frac{1}{x}) = 1$ $x \to +\infty$

$\lim (1+\frac{1}{x})^x = e$ $x \to +\infty$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi - 4\arctan x} + \frac{1}{2(x-1)} \quad x \to 1}$$

$x = 1 + h$ si $x \to 1$, $h \to 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h)$ $f(1+h) = \dfrac{1}{\pi - 4\arctan(1+h)} + \dfrac{1}{2h} = \dfrac{2h + \pi - 4\arctan(1+h)}{[\pi - 4\arctan(1+h)]2h}$

fonction impaire $\Rightarrow$ ordre 2

On travaille sur la dérivé qu'on intègre par la suite :

$\arctan(1+h)' = \dfrac{1}{1+(1+h)^2}$ $\boxed{(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}}$

$= \dfrac{1}{1+(1+h)^2} = \dfrac{1}{2+2h+h2} = \dfrac{1+h\varepsilon_1(h)}{2+2h+h\varepsilon_2(h)}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2+2h \\ \cline{2-2} -(1+h) & \frac{1}{2} - \frac{h}{2} \\ \hline -h & \\ +h+h^2 & \\ \hline 0 + \ldots & \end{array}$$

$\arctan(1+h)$ $\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon_4(h)$

$\pi - 4\arctan(1+h) = \pi - 4(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon_4(h)$

$= -2h + h^2 + h^2 \ \varepsilon_5(h)$

$2h + \pi - 4\arctan(1+h) = h^2 + h^2\varepsilon_5(h)$

$\pi - 4\arctan(1+h) \underset{0}{\sim} h^2$ $f(1+h) \underset{0}{\sim} \dfrac{h^2}{(-2h)2h} = -\dfrac{1}{4}$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} f(1+h) = -\frac{1}{4} = \lim_{x\to 1} f(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}}{x}}$$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon_1(x)$ faire disparaître la constante $\Rightarrow$ ordre 1

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+1+\frac{1}{2}x+x\varepsilon_1(x)} = \sqrt{2+\frac{1}{2}x+x\varepsilon_1(x)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}x+x\varepsilon_2(x)}$$

voisin de 0 $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} - \sqrt{2} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{8}x$

f(x) $\underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{8}x$ $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}x}{x}$ $\lim_{x \to 0}$ f(x) = $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Ex 2 :

$\frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$ (x= 1 $\Rightarrow$ f(x) = ?

f défini et continu, dérivable sur R - { 0, ± 1, 2}

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
f '(x)						
f (x)				?		

Faire un changement de variable : x = 1 + h quand h $\to 0$

f(1 +h) = $\frac{\ln|-1+h|}{\ln|1+h|} = \frac{\ln(1-h)}{\ln(1+h)}$ pour h suffisamment petit toujours positif :

$$= \frac{-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}+h^3\varepsilon_2(h)}{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+h^3\varepsilon_1(h)}$$ faire apparaître une constante au dénominateur :

$$= \frac{-1-\frac{h}{2}-\frac{h^2}{3}+h^2\varepsilon_2(h)}{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+h^2\varepsilon_1(h)}$$

$\neq 0$

$$\begin{array}{l|l} -1-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3} & 1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3} \\ \hline -(-1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{3}) & -1-h-\frac{h^2}{2} \\ \text{-h} & \\ \hline -(h+\frac{h^2}{2}\ldots\ldots & \end{array}$$

$$-1-h-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(x)$$

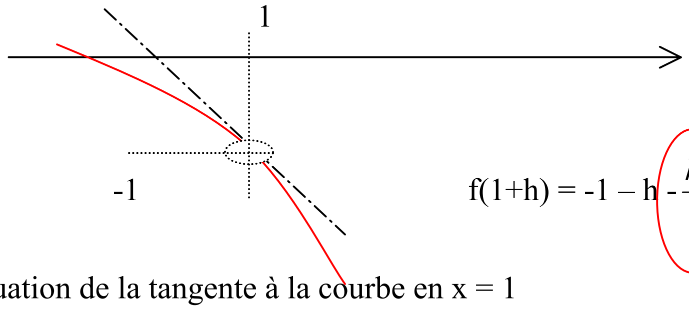
$= \lim_{h \to 0} f(1+h) = -1$ - 1 ne faisant pas parti du domaine de définition, on prolonge f(x) par continuité en x=1

La nouvelle fonction f est dérivable ex : x = 1

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{-1-h-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(h)-(-1)}{h}=-1-\frac{h}{2}+h\varepsilon(h)$$

donc f dérivable en x=1 et f '(x) = -1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$



f(1+h) = -1 – h $-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(x)$

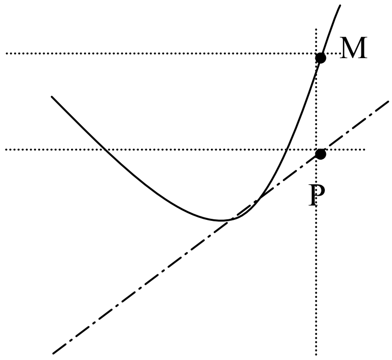
donne la position à la tangente

équation de la tangente à la courbe en x = 1

y- f(1) = f ' (1) (x - 1)

y + 1 = - (x – 1)

y = -1 – (x – 1)



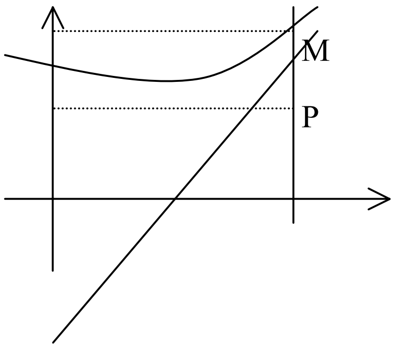
$$\overline{PM}=y_m-y_p=f(x)-[-1-(x-1)]=f(1+h)-[-1-h]$$

$$=f(1+h)-[-1-h]$$

$$=-1-h-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon-(-1-h)=-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(h)=h^2[-\frac{1}{2}+\varepsilon(h)]$$

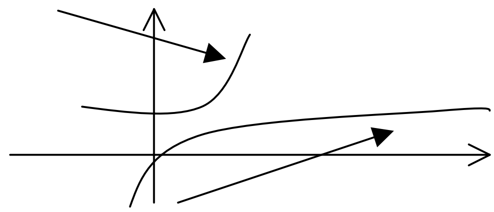
≤ 0 pour h petit $\Rightarrow$ M est en dessous est en dessous de P, la courbe est en dessous de la tangente.

3) Exercice 3



$$\lim_{x\to+\infty}\overline{PM}=0$$

branche de direction OY ex : f(x) = e^x f(x) = x^2



Branche parabolique de direction OX

Ex : f(x) = ln x, f(x) = $\sqrt{x}$

Ex : f(x) $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ f(x) définie sur]-∞, 0 [U] 1, ∞+ [

Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit :

Continu et dérivable sauf en 0 (cause $\sqrt{\ }$)

$\sqrt{\ }$ définie et continu sur [0, $+\infty$ [

et dérivable] 0, $+\infty$ [

On pose $x=\frac{1}{h}$

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
f' (x)	

f (x) $+\infty$ $+\infty$

$$f(\frac{1}{h}) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h}-1}} = \sqrt{\frac{1}{h^3}\frac{h}{1-h}} = \sqrt{\frac{1}{h^2(1-h)}} = \frac{1}{|h|}\sqrt{\frac{1}{1-h}} \qquad \sqrt{\frac{1}{1-h}} = (1-h)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+U)^{\frac{1}{2}} = 1+(\frac{-1}{2})U + \frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)}{2}U^2 + U^2\varepsilon(x) = 1-\frac{U}{2}+\frac{3}{8}U^2 + U\varepsilon(U)$$

$$\sqrt{\frac{1}{1-h}} = 1+\frac{h}{2}+\frac{3}{8}h^2 + h^2\varepsilon_2(x) \qquad f(\frac{1}{h}) = \frac{1}{|h|}(1+\frac{h}{2}+\frac{3}{8}h^2+h^2\varepsilon_2(x))$$

$U \leftarrow -h$

f(x) = $|x|(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(\frac{1}{x})$

$x \to +\infty$

f(x) = x + $\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(x)}$

tand vers 0 y = x + $\frac{1}{2}$ équation de l'asymptote oblique à la courbe quand x $\to +\infty$

$\overline{PM} = f(x)-(x+\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}\frac{1}{x}\varepsilon_2(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{PM} = 0$ $\overline{PM} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\geq 0}\underbrace{[-\frac{3}{8}+\varepsilon_2(\frac{1}{x})]}_{\geq 0}$ pour x assez grand

courbe positive $\Rightarrow$ au dessus de l'asymptote

si $x \to -\infty$

f(x) = $-x-\frac{3}{8}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon_3(\frac{1}{x})$ y = $-x-\frac{1}{2}$ asymptote oblique

$\overline{PM} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\leq 0}[-\frac{3}{8}+\varepsilon_3(\frac{1}{x})] \geq 0$ $\Rightarrow$ courbe au dessus de l'asymptote

$x \to -\infty$

exercice 5-6-7-8-9

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelles :

Ex : $f_1(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ si (x - a) est solution de l'équation

Mise en facteur

$$f_1(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \hline -x^3-x^2 & \\ \hline x^2-1 & x^2+x+1 \\ -(x^2-x) & \\ \hline x-1 & \\ -(x-1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ex : $\dfrac{155}{15} = \underbrace{10}_{}, \ldots\ldots = 10 + \dfrac{5}{15}$

partie entière, c'est le quotient du :

$$\begin{array}{r|l} 155 & 15 \\ \hline 05 & 1 \end{array}$$

$$x^3-1 = \frac{(x^2-1)x+x-1}{x-1} = x + \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \hline -x^3-x^2 & \text{x} \\ \hline x^2-1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = \underbrace{x}_{\text{partie entière}} + \frac{1}{x+1}$$

<u>méthode :</u>

- 1) partie entière.
- 2) rendre la fraction irréductible.
- 3) mettre en factorisation le dénominateur.

$x^2+x+1=0$ discriminant $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4ac$ de l'équation ax^2+bx+c $\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$\Delta = 1-4 = -3 = (\sqrt{3}i)$

$$\Delta = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$x^2+x+1 = (x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})$$

résultat sur les polynômes à coefficients réels :

- tout polynôme de degré $\mathrm{n} \geq 1$ possède n zéros complexes
- tout polynômes réels va se factoriser :
- $P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$

coefficient du terme de plus haut degré

- Les zéros d'un polynôme à coefficients réels sont :

- Soit réels
- Soit complexes conjugués.

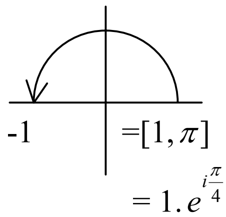
Si $[x-(a+ib)][x-(a-ib)] = (x-a-ib)(x-a+ib) = (x-a)^2 - ib^2 = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Vérifier le discriminant $\Delta < 0$

$\boxed{P(x) = a_n(x-x_1).....(x^2+px+q)}$ avec $\Delta < 0$

Ex $P(x) = x^4 + 1$ Chercher les « 4 » 0 complexe de P

$P(x) = z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1$ $\boxed{[\tau,\theta]^4 = [1,\pi] = \tau.e^{i\theta}}$ $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$



$(\tau.e^{i\theta})^4 = 1.e^{i\pi}$

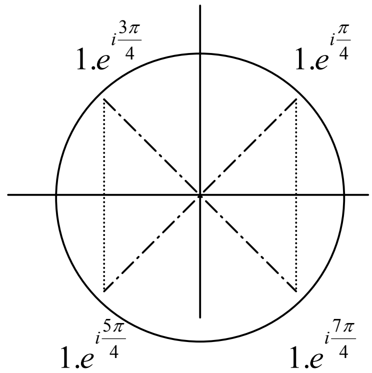
$\tau^4.e^{4i\theta} = 1.e^{i\pi}$

$\tau^4 = 1$

$4\theta = \pi + 2k\pi$

$\tau = 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$



$$P(x) = [x-(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})]$$

$$P(x) = [(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2][(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2] = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Vérifier le discriminant négatif :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 \\ (x^2+2)^2 - 4 + 3 \end{array}\right\} \text{forme canonique}$$

truc : ne fonctionne qu'avec les polynômes de degré 4 sans racine réelle.

$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = A^2 - B^2$ où $A = (x^2+1)$ et $B = 2x$

$(A-B)(A+B) = x^2 + 1 - \sqrt{2}x = x^2 + 1 - \sqrt{2}x$

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 + x^2 = (x^2+1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ discriminant.

5) calcul des coefficients :

$$\text{F(x) = E(x) + } \frac{R(x)}{Q(x)} \text{= E(x) + } \frac{R(x)}{a_n \prod(x-\alpha)^k \underbrace{\prod(x^2+px+q)^k}} = E(x) + \sum + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} ..... \frac{A_1}{(x-\alpha)}$$

k éléments simples de 1ère espèce — couple de zéro complexes conjugués

$p^2 - 4q < 0$

$$F(x) = E(x) + \sum + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} ..... \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_h x + C_h}{(x^2+Px+q)^h} + \frac{B_{h-1}x + C_{h-1}}{(x^2+px+q)^{h-1}} + ... \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^3} = \frac{A_2}{x_2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B_3x + C_3}{(x^2+1)^3} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+1}$$

faire exercice 8 de nombre complexes Polynômes fractions rationnelles.