jmbaes@free.fr

Exercice :

$$F_6(x)=\frac{x-1}{(x+1)\bullet(x-2)^7}$$

$$F_6(x)=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B_7}{(x-2)^7}+\frac{B_6}{(x-2)^6}+\frac{B_5}{(x-2)^5}+\frac{B_4}{(x-2)^4}+\frac{B_3}{(x-2)^3}+\frac{B_2}{(x-2)^2}+\frac{B_1}{x-2}$$

$$A=(x+1)\bullet F_6(x)=\frac{2}{3^7} \qquad B_7=\lim(x-2)^7\bullet F_6(x)=\frac{1}{3}$$

$x\to -1$ $\qquad$ $x\to 2$

on pose : $x=\alpha+u \qquad \Rightarrow x=2+u \qquad F_6(2+u)=\dfrac{1+u}{(3+u)\bullet u^7}$

faire la division : $\dfrac{1+u}{3+u}$

$$1+u$$
$$-(1+u)$$
$$\frac{2u}{3}$$
$$-\frac{2u^2}{9}$$
$$\frac{2u^3}{27}$$
$$-\frac{2u^4}{81}$$
$$\frac{2u^5}{243}$$
$$-\frac{2u^6}{729}$$
$$\frac{2u^7}{2187}$$

3+u

$$\frac{1}{3}+\frac{2u}{9}-\frac{2u^2}{27}+\frac{2u^3}{81}-\frac{2u^4}{243}+\frac{2u^5}{729}-\frac{2u^6}{2187}$$

B7 B6 B5 B4 B3 B2 B1

$$F_6(2+u)=\frac{(3+u)\bullet(\frac{1}{3}+\frac{2u}{9}-\frac{2u^2}{27}+\frac{2u^3}{81}-\frac{2u^4}{243}+\frac{2u^5}{729}-\frac{2u^6}{2187})+\frac{2u^7}{2187}}{(3+u)\bullet u^7}$$

$$F_6(2+u)=\frac{(3+u)\bullet(\frac{1}{3}+\frac{2u}{9}-\frac{2u^2}{27}+\frac{2u^3}{81}-\frac{2u^4}{243}+\frac{2u^5}{729}-\frac{2u^6}{2187})+\frac{2u^7}{2187}}{(3+u)\bullet u^7}$$

$$F_6(2+u)\,\frac{\frac{1}{3}}{u^7}+\frac{\frac{2u}{9}}{u^7}-\frac{\frac{2u^2}{27}}{u^7}+\frac{\frac{2u^3}{81}}{u^7}-\frac{\frac{2u^4}{243}}{u^7}+\frac{\frac{2u^5}{729}}{u^7}-\frac{\frac{2u^6}{2187}}{u^7}+\frac{\frac{2}{2187}}{3+u}$$

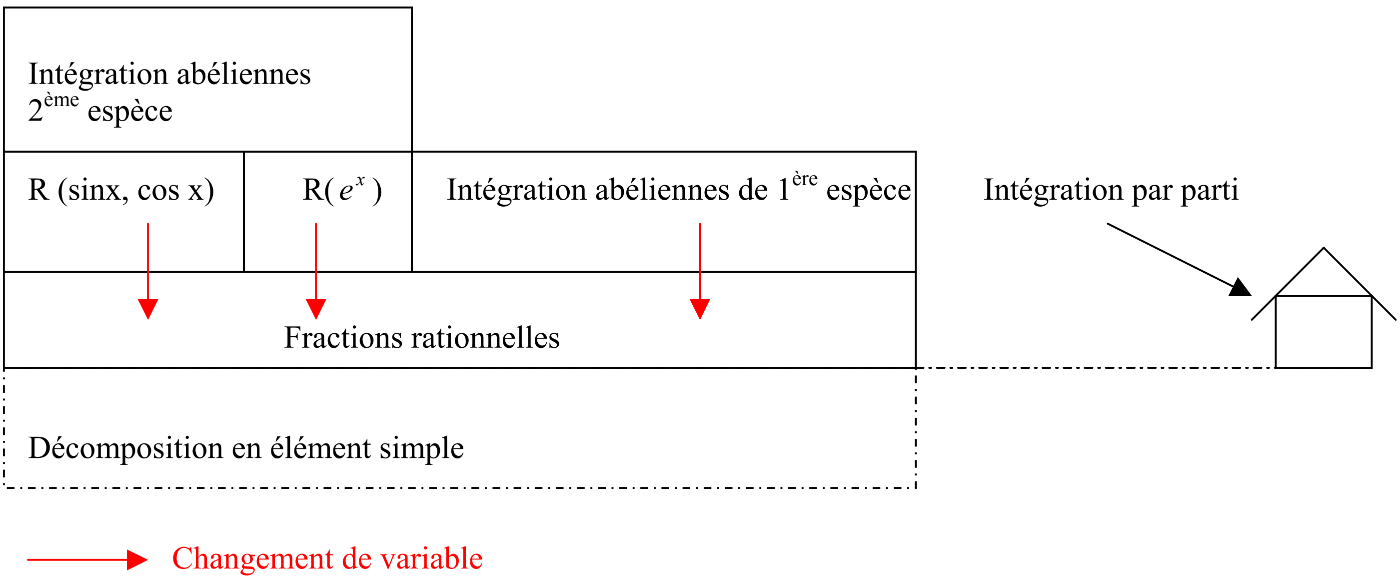
$$F_6(x)=\frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^7}+\frac{\frac{2}{9}}{(x-2)^6}-\frac{\frac{2}{27}}{(x-2)^5}+\frac{\frac{2}{81}}{(x-2)^4}-\frac{\frac{2}{243}}{(x-2)^3}+\frac{\frac{2}{729}}{(x-2)^2}-\frac{\frac{2}{2187}}{(x-2)}+\frac{\frac{2}{2187}}{(x+1)}$$

jmbaes@free.fr

Intégration par parti

$\int u \bullet v' = u \bullet v - \int u' \bullet v$ quand utiliser l'intégration par parti ?

1) avoir envie de dérivé u [u polynôme, ln, arcsin,….. argsh,…..]
2) donc savoir intégrer v' $[(\ln^2 x)' = 2 \bullet \ln x \bullet \frac{1}{x}]$



Pour intégrer une fraction , on la décompose en élément simple , alors on intègre les éléments simple de 1èree espèce :

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} \bullet dx = \begin{cases} \text{si } k = 1 & = A \bullet \ln|x-\alpha| + cte \\ \text{si } k \neq 1 & = \dfrac{A \bullet (x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + cte \end{cases}$$ 1

Intégrer les éléments simples de 2ème espèces
ex :

$$F(x) = \int \frac{x+1}{x^2+4x+13} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \bullet 13 \; < 0$$

1 1) mettre sous forme canonique : $(x^2+4x+13) = (x+2)^2 - 4 + 13 = (x+2)^2 + 9$
on pose y = x + 2

2 2) changement de variable :
exprimer x en fonction de y $\qquad x = y - 2$
$\qquad dx = dy$

4

$$F(x) = \int \frac{y-1}{y^2+9} \bullet dy \quad F(x) = \frac{1}{2}\int 2 \bullet \frac{y}{y^2+9} \bullet dy - \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{2} \bullet \ln|y^2+9| - \frac{1}{3} \bullet \arctan\frac{y}{3} + cte$$

3

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y + cte \quad z = \frac{y}{\omega} \Rightarrow y = \omega \bullet z$$

$$\int \frac{dy}{y^2+\omega^2} = \int \frac{dy}{\omega^2 \bullet (\frac{y^2}{\omega^2}+1)} = \int \frac{\omega \bullet dz}{\omega^2 \bullet (z^2+1)} = \frac{1}{\omega} \bullet \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{\omega} \bullet \arctan z + cte = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{y}{\omega} + cte$$

$$\frac{1}{2} \bullet \ln(x^2+4x+13) - \frac{1}{3} \bullet \arctan \frac{x+2}{3} + cte$$

Intégrer les éléments simples de 2ème espèce :

$$F(x) = \int \frac{x+1}{(x^2+4x+13)^2}$$

$$F(x) = \int \frac{y-1}{(y^2+9)^2} \bullet dy$$

$$z = y^2+9 \qquad \leftarrow \frac{U'}{U^2}$$

$$dz = 2 \bullet y \bullet dy \qquad \downarrow$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \int 2 \bullet \frac{y}{(y^2+9)^2} \bullet dy - \int \frac{dy}{(y^2+9)^2}$$

$$\frac{1}{2} \bullet \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2} \bullet \int z^{-2} \bullet dz = \frac{1}{2} \bullet \frac{z^{-1}}{-1} + cte \qquad A(y) = -\frac{1}{y^2+9} + cte \qquad B(y) = \int \frac{dy}{(y^2+9)^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{y}{3} = \tan \theta \Rightarrow y = 3 \bullet \tan \theta$$

$$dy = 3 \bullet (1 + \tan^2 \theta \bullet d\theta)$$

$$B(y) = \int \frac{dy}{(y^2+9)^2} = \int \frac{3 \bullet (1+\tan^2 \theta)}{9 \bullet \tan^2 \theta + 1} \bullet d\theta = \int \frac{3}{81} \bullet \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \bullet d\theta = \frac{1}{27} \bullet \int \cos^2 \theta \bullet d\theta$$ à linéariser

$$= \frac{1}{27} \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} \bullet d\theta = \frac{1}{27} \bullet (\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}) + cte \qquad \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2\frac{y}{3}}{1+\frac{y^2}{9}} = \frac{6y}{y^2+9}$$

$$B(y) = \frac{1}{54} \bullet \arctan \frac{y}{3} + \frac{1}{27 \bullet 4} \bullet \frac{y}{y^2+9} + cte$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \bullet A(y) - B(y) = \frac{-18-y}{18 \bullet (y^2+9)} - \frac{1}{54} \bullet \arctan \frac{y}{3} + cte = \frac{-x-11}{18(x^2+4x+13} - \frac{1}{54} \bullet \arctan \frac{x+2}{3}$$

Intégration d'une expression rationnelle :

$$\mathrm{F(x)} = \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \mathrm{F(-\,x)} = \int \frac{d(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-dx}{-\sin x} = F(x)$$

U = cos x

Doit s'exprimer rationnellement en fonction de U

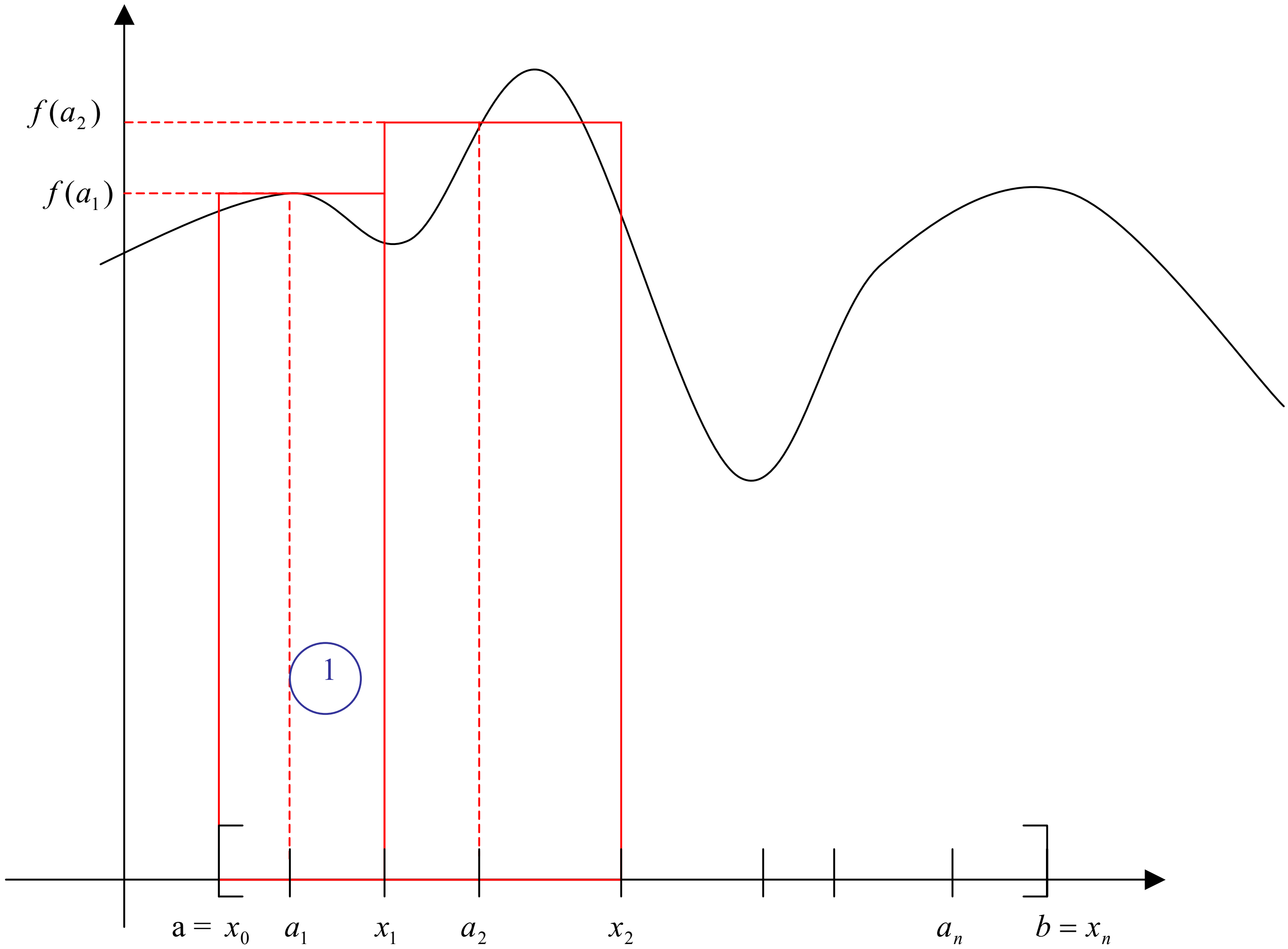
jmbaes@free.fr

du = - sinx dx en mutipliant par $\frac{du}{du}$ nous avons : $F(x) = \int \frac{-\sin x \bullet dx}{-\sin^2 x}$

$$= \int \frac{du}{U^2 - 1} = \int [\frac{1/2}{U-1} + \frac{-1/2}{U+1}] \bullet du = \frac{1}{2} \bullet \ln|U-1| - \frac{1}{2}\ln|U+1| + cte = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + cte\right|$$

U = tan x

X = arctan U $\frac{dx}{du} = \frac{1}{1+U^2}$



S [f , [a,b] , d/ , $a_1, a_2, ...a_n$] = $\sum_{i=n}^{n} (x_i - x_{i-1}) \bullet f(a_i) = (x_1 - x_0) \bullet f(a_i) + ...$

Aire de 1

Ex 2 : 1er calcul :

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{dx}{(e^x+1)^2} \quad U = e^x \quad x = \ln U \quad dx = \frac{du}{U}$$

jmbaes@free.fr

$$I = \underbrace{\int_{u=1}^{u=e}}_{2} \underbrace{\frac{1}{(U+1)^2} \bullet \frac{du}{U}}_{1}$$

quand $x = 0 \quad \Rightarrow U = 1$

$x = 1 \quad \Rightarrow U = e$

$$I = \int_0^1 x \bullet \sqrt{\frac{\& - x}{1+x}} \bullet dx$$ la fonction est continu sur le segment

$$U = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow U^2 = \frac{1-x}{1+x} \qquad (1+x) \bullet U^2 = 1 - x \qquad x \bullet (U^2+1) = 1 - U^2$$

$$x = \frac{1-U^2}{U^2+1} \qquad \frac{dx}{du} = \frac{-2U \bullet (U^2+1) - 2U \bullet (1-U^2)}{(U^2+1)^2} = \frac{-4 \bullet U}{(U^2+1)^2}$$

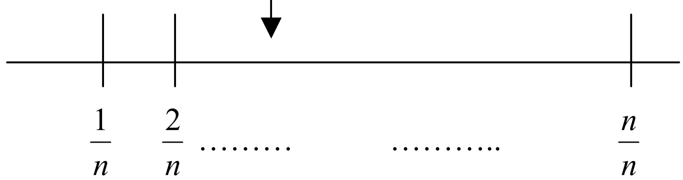
$$dx = \frac{-4 \bullet U}{(U^2+1)^2} \bullet du$$

$$I = \int_{U=1}^{U=0} \frac{1-U^2}{U^2+1} \bullet U \bullet \left(\frac{-4 \bullet U}{(U^2+1)^2}\right) \bullet du \qquad I = \int_{U=0}^{U=1} \left(\frac{4 \bullet U^2 \bullet (1-U^2)}{(U^2+1)^3}\right) \bullet du \quad = \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$U_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+3} + \ldots. + \frac{1}{2n+3(n-1)} \qquad \to 0 \bullet \infty$$

sommes de reiman :

Elles dépendent : f, $\underbrace{[a,b]}_{[0,1]}$, (d), $\underbrace{a_1, a_2 \ldots\ldots. a_n}_{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots\ldots \frac{n}{n}}$



$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \bullet f(a_i) = \frac{1}{n} \bullet \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

$$= \frac{1}{n} \bullet \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2+\frac{6}{n}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2+3 \bullet \frac{n-1}{n}}\right]$$

$$= \frac{1}{n} \bullet \left[\frac{1}{2+3 \bullet \frac{0}{n}} + \frac{1}{2+3 \bullet \frac{1}{n}} + \frac{1}{2+3 \bullet \frac{2}{n}} + \ldots\ldots \frac{1}{2+3 \bullet \frac{n-1}{n}}\right]$$

$$U_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots. f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \qquad \lim_{n \to \infty} U_n = \int_0^1 f(x) \bullet dx$$

$$U = 2 + 3x$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow du = 3 \bullet dx$$

jmbaes@free.fr

$$\int \frac{U'}{U} Log|U| + C$$

$$[\frac{1}{3} \bullet \ln|2+3x|]_0^1 = \frac{1}{3} \bullet \ln\frac{5}{2}$$

Intégrale généralisé :

Une intégrale simple $\Rightarrow \int_a^b f(x)$

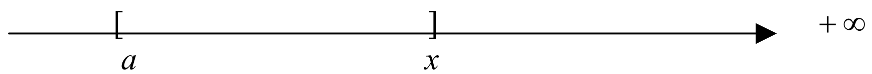
$\Downarrow$

f est continu sur [a,b]

intégrale généralisée : $\int_a^{+\infty} f(x) \bullet dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x) \bullet dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bullet dx$,

$\int_a^b f(x)$ f continu sur]a, b], [a,b[,]a,b[

défini $\int_a^{+\infty} f(x) \bullet dx$ f continu sur [a,b[



F(X) = $\int_a^X f(x) \bullet dx$ F $\begin{cases} [a\,, +\infty[\ \to R \\ X \to F(X) = \int_a^X f(x) \bullet dx \end{cases}$

Si lim F(X) = $I \in R$

$X \to +\infty$ $\int_a^{+\infty} f(x) \bullet dx$ converge (ou existe) $\Rightarrow$ I = $\int_a^{+\infty} f(x) \bullet dx$

Si lim F(X) = ∞ ou n'existe pas

$X \to +\infty$ $\int_a^{+\infty} f(x) \bullet dx$ diverge ou n'existe pas

Ex :

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ avec $\alpha \in R$ et fixé

$$F(X) = \int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^X x^{-\alpha} \begin{cases} = [\ln|x|]_1^X & \text{si } \alpha = 1 \\ = [\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_1^X & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

F(X) ln X si $\alpha = 1$

$\frac{X^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1}$ si $\alpha \neq 1$

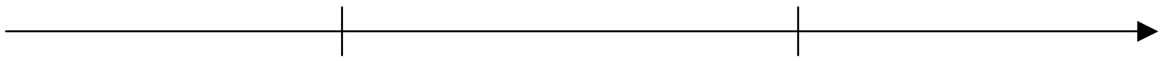
jmbaes@free.fr

$$\lim_{X \to +\infty} F(X) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } -\alpha + 1 > 0 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } -\alpha + 1 < 0 \end{cases}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge

remarque : interprétation géométrique : $f > 0$ $\lim f(x) = e$ $x \to +\infty$



$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ — $\alpha = 0$ — $\alpha = 1$

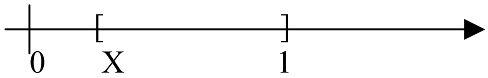
ne vérifie pas lim f(x) = 0 quand $x \to +\infty$ l'intégrale diverge

vérifie lim f(x) =0 mais trop lentement

l'intégrale converge et suffisament vite

ex :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?

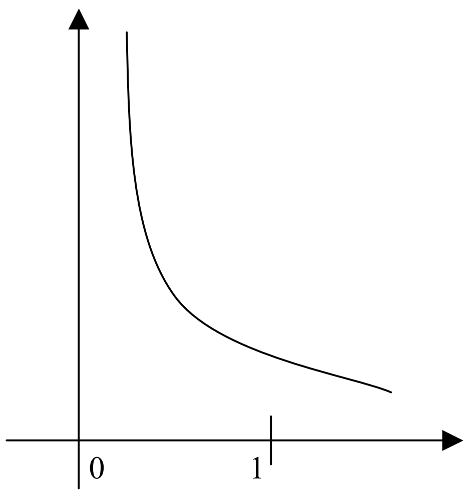


$$\forall X \in]0,1] \qquad F(X) = \int_X^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} [\ln|X|]_X^1 & \text{si } \alpha = 1 \\ [\dfrac{X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_X^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\ln X & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1 - X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{X \to 0^+} F(X) \quad \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } -\alpha + 1 < 0 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } -\alpha + 1 > 0 \end{cases}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ convergente ssi $\alpha < 1$



Fonction équivalente $\quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad$ ssi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Faire exercice 3 :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} \quad \alpha \geq \beta > 0$ fonction continu ?

convergence en $+\infty$

f positive sur $]0,+\infty[$ $\quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$

Vérifier $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} \bullet x^\alpha = \dfrac{1}{1 + x^{\beta-\alpha}} \to 1$ tend vers le terme de plus haut degré.

$x \to +\infty$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$

Etudier la convergence en 0 de $\displaystyle\int_0^1 f(x) \bullet dx$

F positive sur $]0,1]$

$f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ converge ssi $\beta < 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ converge ssi $0 < \beta < 1 < \alpha$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} = \int_0^{+\infty} f(x) \bullet dx$ on pose $U = \sqrt{x}$

$x = U^2$

$dx = 2U du$ si convergence

$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2U du}{U^4 + U}$

Exercice equa dif à faire :