$F_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+1}$ multiplier par « x » $x.F_1(x) = A + x.\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ $A=-1$

$x \to 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -1 + \dfrac{B+C}{2} \quad \Rightarrow 2 = B + C \\ x \to 1 \\ 0 = 1 + \dfrac{-B+C}{2} \quad \Rightarrow -2 = -B + C \\ x \to -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C = 0 \text{ et } B = 2$$

$$F_2(x) = \frac{x^3+1}{x^3-x^2} = \frac{x^3+1}{x^2(x-1)} = 1 + \frac{(-x+1)}{x^2(x-1)} = 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{(x-1)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^3-x \\ \cline{2-2} -(x^3-x) & 1 \\ \hline 0-x+1 & \end{array}$$

multiplier par x^2 et faire tendre $x \to 0$

$-1 = A_2$

multiplier par $(x-1)$ et faire tendre $x \to 1$

$2(0+1) = 0 + A_3 \Rightarrow 2 = A_3$

faire tendre $x \to -1$

$$\frac{0}{-2} = 1 - A_1 - 1 + \frac{2}{-2} \Rightarrow -1 = A_1 \Rightarrow \boxed{F_2(x) = \frac{x^3+1}{x^3-x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)}}$$

par les imaginaires :

$$F_2(x) = \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

identifier partie réel et partie imaginaire :

multiplier par $(x^2+1)^2$ et faire tendre $x \to i$

$$\frac{-i+1}{i} = B_2 i + C_2 = -(1+i) = -1 - i \Rightarrow B_2 = -1 \text{ et } C_2 = -1$$

multiplier par x et faire tendre $x \to 0$

$$\frac{+1}{+1} = A_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{quand } x \to 1 \\ \dfrac{1+1}{2} = 1 = 1 + \dfrac{B_1 + C_1}{2} + \dfrac{-1-1}{2} \Rightarrow 2 = B_1 + C_1 \\ \\ \text{quand } x \to -1 \\ \dfrac{0}{2} = -1 + \dfrac{-B_1 + C_1}{1+1} + \dfrac{1-1}{2} \Rightarrow 2 = -B_1 + C_1 \end{array}\right\} \quad 2 = C_1 \quad \text{et } 0 = B_1$$

$$F_3(x) = \frac{1}{x^4-x} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x-1}.\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2+x+1 \\ \hline +x^2-1 & \\ -(x^2-x) & \\ \hline +x-1 & \\ -(x-1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$F_4 = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Méthode pour trouver les coéfficients :
Jusqu'à 2 coeff : réduire au même dénominateur et identifier :
2, 3 coefficients, x = une valeur
< 3 coeff passer par les imaginaires .

Algèbre linéaire

Entier naturel : $\mathbb{N}$ groupe +, mais pas un corp.

Entier relatif : $\mathbb{Z}$ groupe +, avec opposé, mais pas un corp.

Groupe des quotients : $\mathbb{Q}$ est un corp car toutes solution est définie dans $\mathbb{Q}$ cependant c'est l'ensemble des décimalesfinies ou infinies périodiques. Ex : $x^2 = 2$ n'est pas totalement défini dans $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ est corps : $x^2 = -1$ est sans solution $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ est un corps = $\mathbb{R}^2$

Espace vectoriel

Application externe : la multuplication : $\left.\begin{array}{r}\vec{u} \in E \\ \lambda \in K\end{array}\right] \quad \lambda \cdot \vec{u} \in E$

K étant un corp

L'addition :

$\vec{u} \in E$, $\vec{v} \in E$, $\vec{u} + \vec{v} \in E$ vecteur =

un élément d'un espace vectoriel : le plan : V_2 $\mathbb{R}^2 = \left\{ (x,y) / x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R} \right\}$

un volume : $V_3 = \mathbb{R}^3 \left\{ (x,y,z) / x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R} ; z \in \mathbb{R} \right\}$

$V_n = \mathbb{R}^n \left\{ (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) / x_1 \in \mathbb{R} ; \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathscr{F}$ est l'ensemble des fonctions.

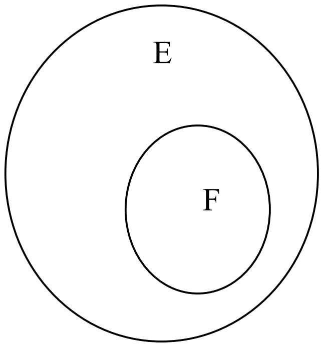
$\mathscr{P}$ est l'ensemble des polynôme.

Théorème :

E *ev* (espace vectoriel)
$F \subset E$,

Si F sev (sous espace vectoriel)
$F \neq 0$
F stable pour + et $\bullet$.

$\forall \vec{u} \in F\,,\quad \forall \vec{v} \in F\,,\qquad \vec{u}+\vec{v} \in F$
$\forall \vec{u} \in F\,,\quad \forall \lambda \in K\,,\qquad \lambda \bullet \vec{u} \in F$
démontrons ces trois lois du sev plongé dans un ensemble plus grand :



$\forall \vec{u} \in F$

$\forall \vec{v} \in F$

$\forall \vec{w} \in F$

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ associatif de + dans E

$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ commutatif de + dans E

démontrons que l'élément neutre appartient aussi à F

$\vec{O} \in F\,?$
$F \neq \phi \quad \exists \vec{v} \in F \qquad 0 \bullet \vec{v} \in F$ (multiplier par scalaire 0)
$\forall \vec{v} \in F \quad (-\vec{v}) \in F\,? \qquad -\vec{v} = (-1) \bullet \vec{v} \in F$

ex : $\mathscr{P}$ ensemble des polinômes réel *ev* sur $\mathbb{R}$

$\mathscr{P}_n$ ensemble des polynômes de d° $\leq n$

$\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}$ $\qquad\qquad$ $\mathscr{P}_n$ *ev* sur $\mathbb{R}$?

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_n \neq \phi \qquad 0 \in \mathscr{P}_n \\ \text{Stable pour } + \\ \text{Stable pour } \bullet \end{array}\right\} \quad \mathscr{P}_n \text{ sev de } \mathscr{P} \text{ donc } \mathscr{P}_n \ \ ev \ \text{ sur } \mathbb{R}$$

Ex : les ensembles vectoriels sont-ils des sous ensembles vectoriels ?
$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + 3z = 0 \}$
$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x - y) (y + z) = 0 \}$
$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0 \text{ et } y + z = 0 \}$
$A \neq \phi$ car $(0,0,0) \in A$

Stabilité pour +
$\forall (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_1 - 2y_1 + 3z_1 = 0$
$\forall (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_2 - 2y_2 + 3z_2 = 0$
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in A?$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\ X \quad , \quad Y \quad , \quad Z \ )$
$X - 2Y + 3Z = (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = x_1 - 2y_1 + 3z_1 + x_2 - 2y_2 + 3z_2 = 0 + 0 = 0$

$\forall \vec{v}_1 \in A,\ \forall \vec{v}_2 \in A, \qquad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in A$
stabilité pour $\bullet\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x - 2y + 3z = 0$

$\lambda\vec{v} = (\lambda \bullet x, \lambda \bullet y, \lambda \bullet z) \in A$

(X , Y , Z)

X – 2Y + 3Z = $\lambda x - 2\lambda y + 3\lambda z = \lambda(x - 2y + 3z) = \lambda 0$

$C =$ { (x,y,z) $\in$ $\mathbb{R}^3$ / x – y = 0 et y + z = 0 }

C$\neq \phi$ car (0,0,0) $\in A$

$$\left.\begin{matrix}(x_1, y_1, z_1) \\ (x_2, y_2, z_2)\end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{X} - \underbrace{(y_1 + y_2)}_{Y} = 0 \\ \text{et} \\ \underbrace{(y_1 + y_2)}_{Y} + \underbrace{(z_1 + z_2)}_{Z} = 0\end{matrix}$$

B$\neq \phi$ $\Rightarrow 0 \bullet 0 = 0$

$$(X – Y) (Y + Z) = (x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \bullet (y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$$
$$= ((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)) \bullet ((y_1 + z_1) + (y_2 + z_2))$$
$$= ((x_1 - y_1)(y_1 + z_1)) + ((x_1 - y_1)(y_2 + z_2)) + ((x_2 - y_2)(y_1 + z_1)) + ((x_2 - y_2)(y_2 + z_2))$$

la multiplication ne se simplifie pas…
voyons pour l'addition :

$\vec{v}_1 = (1,1,0) \in B$ $\vec{v}_2 = (0,1,-1) \in B$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \underbrace{(1,2,-1)}_{(X,Y,Z)}$

(X – Y) (Y + Z) = (-1) . (+1)$\neq$ 0

donc $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \notin B$
donc non stable pour +
donc non *sev* de $\mathbb{R}^3$

espace vectoriel page 4

$F \cap G \neq \phi$ car $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$ donc $\vec{0} \in F \cap G$

stable pour addition :

$\forall \vec{u} \in F$, $\vec{v} \in F$ donc $\vec{u} + \vec{v} \in F$

si $\vec{u} \in G$, et $\vec{v} \in G$ donc $\vec{u} + \vec{v} \in G$ donc $\vec{u} + \vec{v} \in F \cap G$

stable pour la multiplication :

$\forall \vec{u} \in F \cap G$

$$\forall \lambda \in K \qquad \left.\begin{matrix}\vec{u} \in F \text{ donc } \lambda \bullet \vec{u} \in F \\ \vec{u} \in G \text{ donc } \lambda \bullet \vec{u} \in G\end{matrix}\right] \text{ donc } \lambda \bullet \vec{u} \in F \cap G$$

$F \cup G$ non *sev :*

exemple :

B_1= { (x,y,z) $\in$ $\mathbb{R}^3$ / (x – y) (y + z) = 0} x = y ou y = -z

B_2= { (x,y,z) $\in$ $\mathbb{R}^3$ / x – y = 0} x = y

V = { (x,y,z) $\in$ $\mathbb{R}^3$ / (y + z) (x –y) = 0} = $B_1 \cup B_2$

sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (2.2.2)

A = { (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$ / x – 2y + 3z = 0 }   x = 2y – 3z

A = {(2y – 3z, y, z) / y $\in \mathbb{R}$, z $\in \mathbb{R}$

A = { (2y,y,0) + (-3z, 0, z) / y $\in \mathbb{R}$, z $\in \mathbb{R}$}

A = { y(2,1,0) + z(-3, 0, 1) / y $\in \mathbb{R}$, z $\in \mathbb{R}$}

Est un sous espace vectoriel engendré par les 2 vecteurs = < (2, 1 , 0) ; (-3 , 0 , 1) >
A est un sous espace vectoriel engendré par (2, 1 , 0) et (-3 , 0 , 1), la famille (2, 1 , 0) ; (-3 , 0 , 1) est génératrice de A
Ex :

C = { (x,y,z) $\in \mathbb{R}^3$ / x – y = 0 et y + z = 0 }
y = x et y = -z
= {{y, y, -y) / y $\in \mathbb{R}$}
= { y (1 , 1 , -1), y $\in \mathbb{R}$} 1° de liberté

familles libres :

la famille { (2, 1 , 0) ; (-3 , 0 , 1) } est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?
ex) $\forall \lambda_1 \in K, \forall \lambda_2 \in K$

$$\lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(-3,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow ((2\lambda_1 - 3\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2)) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ famille libre

ex) {(-2,1, 0) ; (1, 0, 1) ; (-1 , 2, 3)} est –il une famille libre ?

$\forall \lambda_1 \in K, \forall \lambda_2 \in K$, $\forall \lambda_3 \in K$,

λ_1 (-2,1, 0) + λ_2(1, 0, 1) + λ_3(-1 , 2, 3) = (0,0,0)

$-2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$ $\longrightarrow$ $4\lambda_3 - 3\lambda_3 - \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$ $\lambda_1 = -2\lambda_3$

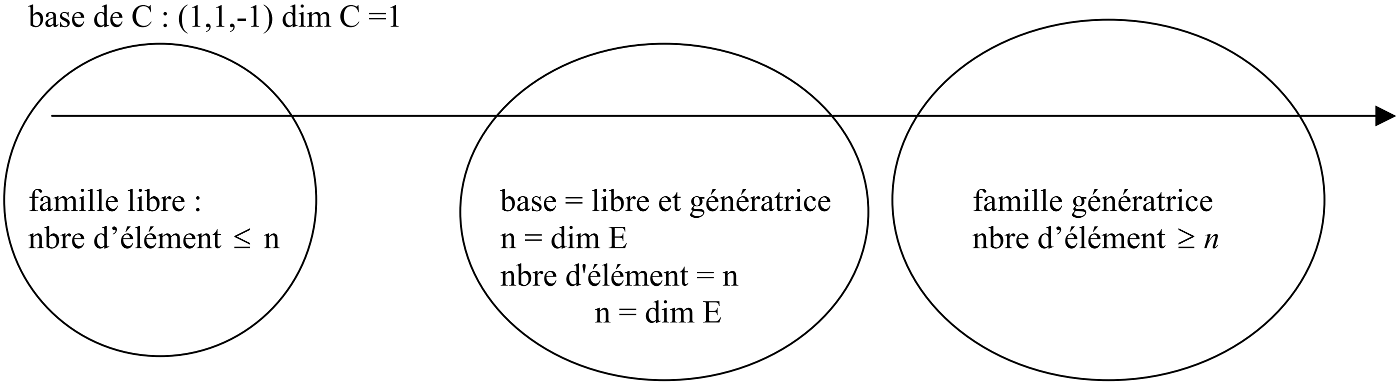
$\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$ $\lambda_2 = -3\lambda_3$

d'autre solution ?

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3 \quad \lambda_3 = 1$ donc $-2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow$ c'est une famille liée

bases (2.3)

exemple : (2,1,0) ; (-3,0,1)
(-3,0,1) ; (2,1,0) dim B =2
base de C : (1,1,-1) dim C =1



ex $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ $\vec{v}_2 = (1,1,0)$ $\vec{v}_3 = (1,2,3)$ $\vec{v}_4 = (7,8,9)$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est-il une famille libre ?: 4>3 (dim $\mathbb{R}^3$) la famille est lièe.

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ 2 éléments < à la dim3, famille libre non génératrice.

Ex :

1) Montrer que l'ensemble des fonctions dérivables est un espace vectoriel.

2) Montrer que la famille {(1,0,0) ; (1, 1, 0) ; (1, 1, 1)} est un espace vectoriel.

3) Montrer que la famille précédente est libre

4) Montrer que la famille { cos, sin} est libre dans $\mathscr{F}$

5) Montrer que la famille {1, x, ….x^n } est libre dans P_n

{f,g,h} f(x) = cos x, g(x) = sin x, h(x) = cos (x-1)

$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos(x-1) = 0$

x = 0 x = $\frac{\pi}{2}$ $x = \pi$

partir avec cos (x-1) = cos x cos 1 + sinx sin 1

$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x \cos 1 + \lambda_3 \sin x \sin 1 = 0$ x = 0 $\lambda_1 + \lambda_3 \cos x = 0$

x = $\frac{\pi}{2}$ $\lambda_2 + \lambda_3 \sin 1 = 0$

pour $\lambda_3 = 1$:

$\lambda_1 = -\cos 1$ $\lambda_2 = -\sin 1$ (-cos1) f + (-sin1) g + h = 0

$\vec{v}_1=(1,0,0)$ $\vec{v}_2=(1,1,0)$ $\vec{v}_3=(1,1,1)$ génératrice $\forall$ V x,y,z $\in \mathbb{R}$ données
peut-on trouver $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, tel que :
$\vec{v}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3$

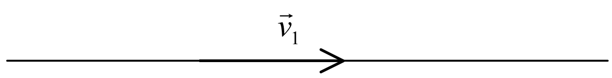
$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x$
$\lambda_2+\lambda_3=y$
$\lambda_3=z$

les inconnues sont : $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, x, y, z, sont des paramètres.
$\lambda_3=z$ $\lambda_2=y-z$ $\lambda_1=x-y$
tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut donc s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}3$ donc $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}3\}$
famille génératrice de $\mathbb{R}^3$
si $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ comme dim $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et est génératrice

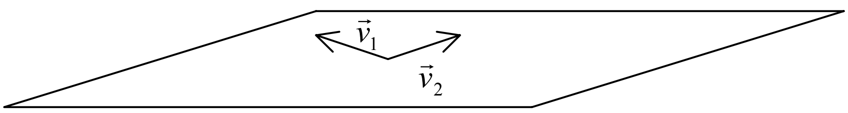
$\vec{v}_1=(-2,1,0)$ $\vec{v}_2=(1,0,1)$ $\vec{v}_3=(-1,2,3)$
on a vu que les vecteur étaient liés donc ce n'est pas une base dans $\mathbb{R}^3$ donc n'est pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$
.
$-2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=x$ $-2(y-2\lambda_3)+(z-3\lambda_3)-\lambda_3=x=-2y+z$
$\lambda_1+2\lambda_3=y$ $\lambda_1=y-2\lambda_3$
$\lambda_2+3\lambda_3=z$ $\lambda_2=z-3\lambda_3$
si $x\neq-2y+z$ on ne peut pas trouver $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, donc $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}3$ non génératrice de $\mathbb{R}^3$
quelle est la base de $<\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3>$?

$<\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3>$ = { (x,y,z) $\in \mathbb{R}^3$/ x = -2y + z }
= {(-2y + z, y, z) / y$\in\mathbb{R}$,z $\in\mathbb{R}$,}
={ (-2y,y,0),(z,0,z) / ….
= {(y(-2,1,0),z(1,0,1) / ….
$=<\vec{v}_1,\vec{v}_2>$ de base dim $\mathbb{R}^2$ remarquesz : les *sev* de $\mathbb{R}^3$ sont {0,0,0} pas de dim :0

$<\vec{v}_1>$ droite dim : 1



$<\vec{v}_1,\vec{v}_2>$ plan dim :2



remarque : si F *sev*$\subset$E *ev* dim E = n si dim F = n alors F = E
l'hyperplan de E est un espace vectoriel de dim n-1
ex : 1, x , x^2,.............x^n

$P_0,P_1,P_2,..........P_n$ $\forall x\in \mathbb{R}\,\lambda_0+\lambda_1x+........\lambda_nx^x=0$
$\Rightarrow\lambda_0=\lambda_1=........=\lambda_n$

déf : E *ev* F*ev* fE $\rightarrow$F linéaire ssi $\forall\lambda_1\in K$ $\forall v\lambda_2\in K$ $\forall\vec{v}_1\in E$ $\forall\vec{v}_2\in E$

$f(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)=\lambda_1 f(\vec{v}_1)+\lambda_2 f(\vec{v}_2)$

ex : f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x $\mapsto$ ax f($\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$) = a ($\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$)

$= \lambda_1(ax_1)+\lambda_2(ax_2)$

$= \lambda_1 \text{f}(x_1) + \lambda_2 \text{f}(x_2)$

ex : f de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

(x,y,z)$\mapsto$ ((x+y),z) montrer c'est une fonction linéaire.

$\forall\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $\forall\lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\forall(x_1,y_1,z_1)\in \mathbb{R}^3$ $\forall(x_1,y_1,z_1)\in \mathbb{R}^3$

$f[\lambda_1(x_1,y_1,z_1)+\lambda_2(x_2,y_2,z_2)] = f[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2,\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2] =$

$[\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2,\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2] = (\lambda_1 x_1+\lambda_1 y_1,\lambda_1 z_1)+(\lambda_2 x_2+\lambda_2 y_2,\lambda_2 z_2) =$

$\lambda_1(x_1,y_1,z_1)+\lambda_2(x_2,y_2,z_2)$

ex f $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}$ $\forall\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $\forall\lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\forall\vec{u}_1 \in \mathscr{F}$ $\forall\vec{u}_2 \in \mathscr{F}$

u$\mapsto$ u'

f ($\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$) = ($\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$)' = $\lambda_1 u'_1+\lambda_2 u_2' = \lambda_1 f(u_1)+\lambda_1 f(u_2)$

exemple de fonction non linéaire (fonction afine)

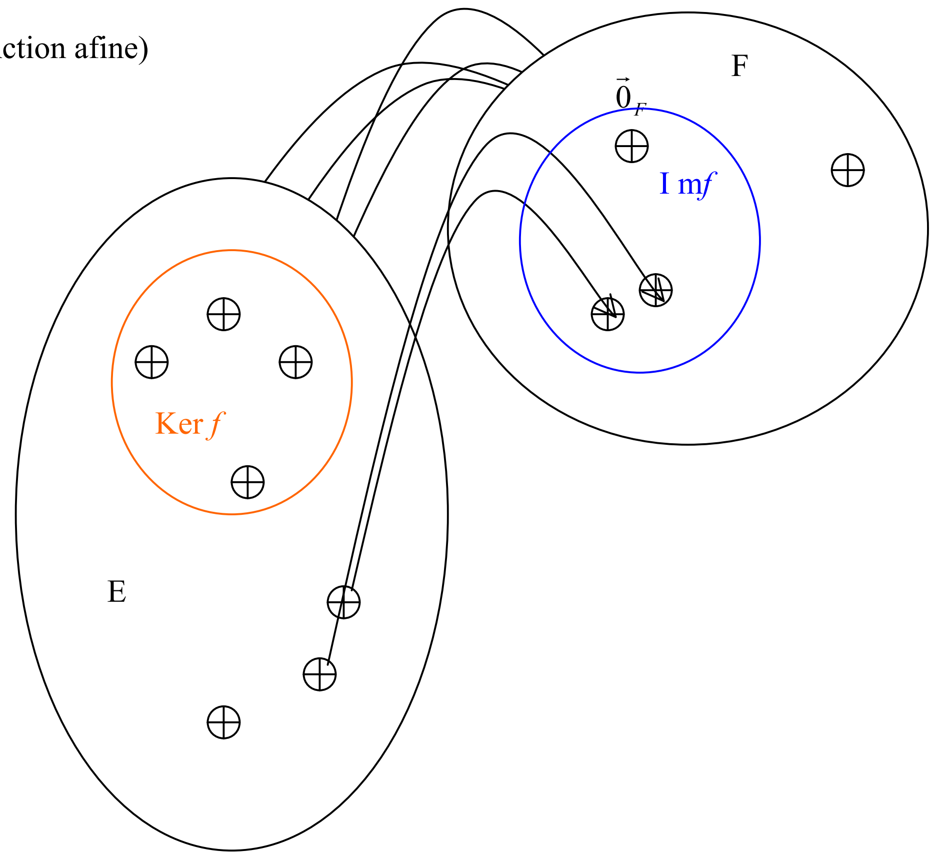
de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x$\mapsto 2x+1$

Ker f = $\{\vec{u}\in E / f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$ *sev* de E

Noyau

Im f = $\{\ \vec{v}\in F / \exists\vec{u}\in E\ f(\vec{u}) = \vec{v}\ \}$



$\forall\vec{u}\in E$

$\underbrace{f((\vec{u}+(-1)\vec{u})}_{\vec{0}_E} = \underbrace{f((\vec{u})+(-1)\bullet f(\vec{u})}_{\vec{0}_E}$

f est injective ssi Kerf = $\{\vec{0}_E\}$

si Ker f $\neq \{\vec{0}_E\}$, il existe au moins 2 vecteurs $\neq \vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans Ker f f($\vec{v}_1$) = $\vec{0}_E$ =f($\vec{v}_2$) f non injective

donc si f injective alors Ker f = f ($\vec{0}_F$)

si Ker f = {$\vec{0}_E$ }

$\forall \vec{v}_1 \in E$, $\forall \vec{v}_2 \in E$ $f((\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2)$ $f((\vec{v}_1) - f(\vec{v}_2) = \vec{0}_E$ *donc* $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

exercice 2 algèbre numérique :

$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\forall \vec{v}_1 \in, \mathbb{R}^4$ $\forall \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^4$

f($\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = f[\ \lambda_1(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2, t_2)]$

$= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)$

(X , Y Z , T)

$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 ; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 ; \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2$

$= \lambda_1(x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2(x_2 + y_2 + z_2); \lambda_1(x_1 + y_1 + t_1) + \lambda_2(x_2 + y_2 + t_2); \lambda_1(t_1 - z_1) + \lambda_2(t_2 - z_2)$

Ker f = {(x,y,z,t) $\in \mathbb{R}^4$ / (x+y+z ; x+y+t ; t-z) = (0,0,0)

x+y+z = 0 $\longrightarrow$ x + y + z = 0 Ker f = { x, y, z, t ∈ ∈ $\mathbb{R}^4$ / (x+y+z = 0 et t = z}

x+y+t = 0 t = z

t-z = 0 = –z +t

Ker f = { -y – z ; y ; z ; z tel que y∈ $\mathbb{R}$ et z ∈ $\mathbb{R}$} séparer les y et z :

$\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$

(y (-1 ;1 ;0 ;0) ;z (-1 ;0 ;1 ;1) ⇒<(-1 ;1 ;0 ;0) ; (-1 ;0 ;1 ;1)> est la base de dim 2 de Kerf où $\vec{v}_1 et \vec{v}_2$ sont les vecteur génératrice de Ker f.

or $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaire donc $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$ sont une famille libre.

Imf = {$\vec{v} \in \mathbb{R}^3 / \exists\, \vec{u} \in \mathbb{R}^4\ f(\vec{u}) = \vec{v}$ }

= { (x ;y ;z) ∈$\mathbb{R}^3 / \exists\, \vec{u} \in$ (x ;y ;z ;t)∈ $\mathbb{R}^4$

(x + y + z ; x + y + t ; t - z) = (X ;Y ; Z)

x + y + z = X

x + y + t = Y

t - z = Z ⇒ t = Z + z x + y + z + Z = Y

si X $\neq Y - Z$ pas de solution

si X = Y – Z x + y + z = X

t = z + Z une $\infty té$ de solution.

Im f = (X, Y , Z) ∈ $\mathbb{R}^3$/ X = Y – Z

= (Y –Z ;Y ; Z) avec Y et Z ∈ $\mathbb{R}$

séparer les Y et Z (Y ;Y ;0) + (-Z ; 0 ;Z)

Y(1 ;1 ;0) + Z (-1 ;0 ; 1)

<(1 ;1 ;0) ; (-1 ;0 ; 1)> dim Imf = 2