jmbaes@free.fr 7 mars 2003

Espace E dim n $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,.....\vec{e}_n)$ ancienne base

$\mathscr{B}' = (\vec{e}_1^{\,'},.....\vec{e}_n^{\,'})$ nouvelle base

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ : & & : \\ a_{n1} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \\ \vec{e}_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vec{e}_1^{\,'} & ..... & \vec{e}_n^{\,'} \end{array} & \end{array}$$ P inversible det $\neq 0$

$x_1.....x_n$ anciennes composantes

$x_1^{'}.....x_n^{'}$ nouvelles composantes

$\vec{e}_1^{\,'} = a_{11} \bullet \vec{e}_i + ...a_{n1} \bullet \vec{e}_n$

$\vec{e}_j^{\,'} = a_{1j} \bullet \vec{e}_i + ... + a_{ij} \bullet \vec{e}_i .....a_{nj} \bullet \vec{e}_n$

$\vec{e}_n^{\,'} = a_{1n} \bullet \vec{e}_i + ... + a_{in} \bullet \vec{e}_i .....a_{nn} \bullet \vec{e}_n$

$\forall \vec{v} \in E \qquad \vec{v} = x_1 \bullet \vec{e}_1 + ...x_n \bullet \vec{e}_n$

$\vec{v} = x_1^{'} \bullet \vec{e}_1^{\,'} + ...x_n^{'} \bullet \vec{e}_n^{\,'} = x_1^{'} \bullet (a_{11} \bullet \vec{e}_i + ...a_{n1} \bullet \vec{e}_n) + x_j^{'} \bullet (a_{1j} \bullet \vec{e}_i + ... + a_{ij} \bullet \vec{e}_i .....a_{nj} \bullet \vec{e}_n) + x_n^{'} \bullet (a_{1n} \bullet \vec{e}_i + ... + a_{in} \bullet \vec{e}_i .....a_{nn} \bullet \vec{e}_n)$

$\vec{v} = x_1^{'} \bullet \vec{e}_1^{\,'} + ...x_n^{'} \bullet \vec{e}_n^{\,'} = (a_{11} \bullet x_1^{'} + ...a_{1j} \bullet x_j^{'} + ...a_{1n} \bullet x_n^{'}) \bullet \vec{e}_1 + (a_{n1} \bullet x_1^{'} + ...a_{nj} \bullet x_j^{'} + ...a_{nn} \bullet x_n^{'}) \bullet \vec{e}_n$

donc :

$x_1 = a_{11} \bullet x_1^{'} + ...a_{1j} \bullet x_j^{'} + ...a_{1n} \bullet x_n^{'}$

$x_i = a_{i1} \bullet x_1^{'} + ...a_{ij} \bullet x_j^{'} + ...a_{in} \bullet x_n^{'}$

$x_n = a_{n1} \bullet x_1^{'} + ...a_{nj} \bullet x_j^{'} + ...a_{nn} \bullet x_n^{'}$

X $\begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_i \\ : \\ x_n \end{bmatrix}$ X' = $\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ : \\ x_j^{'} \\ : \\ x_n^{'} \end{bmatrix}$ X = P $\bullet$ X' ou X' = $P^{-1} \bullet$ X

Ex : f E $\rightarrow$ E

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{B} & & \mathscr{B} \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ \mathscr{B}' & & \mathscr{B}' \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ : \\ \vec{e}_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & ..... & f(\vec{e}_n) \end{array} & \end{array}$$

X = P x' Py' = A Px'

Y = P y' y' = P^{-1} A P x' $\boxed{B = P^{-1} \text{ A P}}$ esseyons de trouver une matrice diagonale

Y = A X

Ex : dans R^2 $\mathscr{B} = ((1,0) ;(0,1))$

f $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathscr{B}' = ((1,0) ; (1,1)) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = P^{-1}\ A\ P$

calculer P^{-1}

$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $P = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$ $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B = P^{-1}\ A\ P = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$B = P^{-1}\ A\ P$ les applications B et A sontt semblables, elles ont le même déterminant :
det B = (det P^{-1}) x (det A) x (det P) multiplication sur les nombre est commutative d'où
det B = det A x (matrice identité).

Diagolalisation :

E de dim n $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,.....\vec{e}_n)$ $\mathscr{B}'(\vec{v}_1,.....\vec{v}_n)$

$$\underset{A}{f\ E \rightarrow E}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{array}$$

les inconnues sont :

$\vec{v}_1,.....\vec{v}_n$

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= \lambda_1 \bullet \vec{v}_1 \\ &\vdots \\ f(\vec{v}_2) &= \lambda_n \bullet \vec{v}_n \end{aligned}$$

$\lambda_1,.....\lambda_n$

définition :

On appelle valeur propre de f tout $\lambda \in E$ tel qu'il existe au moins un vecteur $\vec{v} \in E$ $\vec{v} \neq \vec{0}$

Vérifiant : $f(\vec{v}) = \lambda \bullet \vec{v}$

On appelle vecteurvecteur propre de f associé à la valeur propre λ tout vecteur vérifiant : $f(\vec{v}) = \lambda \bullet \vec{v}$

$\vec{V}$ représenté dans $\mathscr{B}$ par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$? $\lambda \in K$ $f(\vec{V}) = \lambda \bullet \vec{V}$ $AX = \lambda X$

S $\begin{cases} a_{11} \bullet x_1 + a_{12} \bullet x_2 + ...a_{1n} \bullet x_n = \lambda \bullet x_1 \\ a_{21} \bullet x_1 + a_{22} \bullet x_2 + ...a_{2n} \bullet x_n = \lambda \bullet x_2 \\ a_{n1} \bullet x_1 + a_{n2} \bullet x_2 + ...a_{nn} \bullet x_n = \lambda \bullet x_n \end{cases}$ les inconnues sont $x_1 \cdots x_n$ et λ

$$S \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) \bullet x_1 + ...a_{12} \bullet x_2 + ...a_{1n} \bullet x_n = 0 \\ a_{21} \bullet x_1 + (a_{22} - \lambda) \bullet x_2 + ...a_{2n} \bullet x_n = 0 \\ a_{n1} \bullet x_1 + a_{n2} \bullet x_2 + ...(a_{nn} - \lambda) \bullet x_n = 0 \end{array} \right.$$

On considère (S) comme un système de n équations à n inconnues $x_1 \cdots x_n$ la matrice de (S) est A - $\lambda \bullet$I

Si det (A - $\lambda \bullet$I) $\neq 0$

(S) a une solution unique $x_1 = 0 \cdots x_n = 0$

Si det (A - $\lambda \bullet$I) = 0 est ~~impossible~~ ou indéterminé

Or $x_1 = 0 \cdots x_n = 0$ est toujours solution $\Rightarrow$

Donc :

Théorème : λ valeur propre de f ssi det (A - $\lambda \bullet$I) = 0

$$\Downarrow$$

P(λ) matrice caractétistique.

Remarques si f représentée dans B par A et B' par A' A' = P^{-1} A P

Det (A' - $\lambda \bullet$I) = det ((P^{-1} A P) - (P^{-1} $\lambda \bullet$I P))

= det [$\cancel{P^{-1}}$ (A - $\lambda \bullet$I)$\cancel{P}$]

= det (A - $\lambda \bullet$I)

page 3 théorème:

ex: P(λ) $= (\lambda - 2)^2 \bullet (\lambda + 3)^3$

$\left.\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right]$ une valeur propre double ou d'ordre de multiciplicité 2

$\left.\begin{array}{l}-3\\-3\\-3\end{array}\right]$ trois valeur propre triple ou d'ordre de multiplicité 3

dim de E$_1$ = 2 E$_1$ = { $\vec{V} \in E / f(\vec{V}) = 1 \bullet \vec{V}$ }

dim de E$_2$ = 3 E$_2$ = {$\vec{V} \in E / f(\vec{V}) = -3 \bullet \vec{V}$ }

$$D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -3 & & \\ & & & -3 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \\ \vec{V}_5 \end{array} \end{array}$$

? $\vec{V}_1$, ? $\vec{V}_2$ $f(\vec{V}_1) = \vec{V}_1)$ $f(\vec{V}_2) = \vec{V}_2)$

$f(\vec{V}_1)$ $f(\vec{V}_2)$ $f(\vec{V}_3)$ $f(\vec{V}_4)$ $f(\vec{V}_5)$

$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \vec{V}_5)$ base de E

Libre ($\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$) libre $\Rightarrow$ dim≥ 2

Si $\mathscr{B}_1 = (\vec{V}_1,\ \vec{V}_2$) est une base de E_1

Si $\mathscr{B}_2 = ($ $\vec{V}_3,\ \vec{V}_4,\ \vec{V}_5$) est une base de E_{-3}

Alors $B_1 \cup B_2 = (\vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ \vec{V}_3,\ \vec{V}_4,\ \vec{V}_5)$ base de E

Diagonaliser f

1) rechercher des valeurs propres
2) rechercher d'une base de vecteur propre D
3) $D = (P^{-1}\ A\ P)$ $\qquad P\ D\ P^{-1} = A$

Diagonaliser $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Pole caractéristique:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \bullet I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} 1-\lambda & 3-\lambda & -2 \\ 3 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -\lambda \\ C_1 & C_2+C_1 & C_3 \end{array} = (3-\lambda)\bullet \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\bullet \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} = (3-\gamma)\bullet(-2-\lambda)\bullet(-\lambda)$$

Les valeurs propres sont: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 0$

Chercher les sous espaces associés à $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$

Recherche de $E_3 = \{\vec{V} \in E / f(\vec{V}) = 3 \bullet \vec{V}\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / A \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / (A - 3\bullet I) \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$-2x + 2y - 2z = 0$

$3x - 3y - 2z = 0$ (normalement indéterminée)

$x - y - 3z = 0$

Gauss :

$$\begin{matrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{matrix} =$$

$\Rightarrow$ -2x + 2y –2z = 0
$\Rightarrow$ -10z = 0
$\Rightarrow$ -8z = 0 z = 0 x = y

$$E_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; / \; x = y \text{ et } z = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \dim E_3 = 1 \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

recherche de $E_{-2} = \{ \vec{V} \in E / f(\vec{V}) = -2 \bullet \vec{V} \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / (2 + 2.I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

3x + 2y – 2z = 0
3x - y + 2 z = 0
4x + y = 0 $\Rightarrow$ -5x – 2z = 0 et y = - 4.x

$$E_{-2} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; / \; -4.x = y \text{ et } y = \frac{8}{5} z \} = \begin{pmatrix} -2x \\ 8x \\ 5x \end{pmatrix} \text{ d'où } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Recherche de :

$$E_0 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; / \; \vec{V} \in E / f(\vec{V}) = 0 \bullet \vec{V}$$

x + 2y – 2z = 0 x + 2x – 3x = 0

3x – 2 z = 0 $z = \frac{3}{2} x$

x – y = 0 y = x

$$\vec{V}_3 = < \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} >$$

conclusion :

Dans la base ($\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$)

La matrice de f est :

$$D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{V}_1) & f(\vec{V}_2) & f(\vec{V}_3) \end{array} & \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{array} \end{array}$$

Et D = P^{-1} A P vérifier : PD = AP

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & \vec{V}_1 \\ 0 & -2 & 0 & \vec{V}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{V}_3 \\ f(\vec{V}_1) & f(\vec{V}_2) & f(\vec{V}_3) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & -16 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & -16 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

diagonaliser : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(B - \lambda \bullet I) = \begin{array}{ccc} 1-\lambda & 1 & \& \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{array}$

$$= \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ C_1 + C_2 + C_3 \end{array} = (3-\lambda) \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \bullet 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$= ((3-\lambda) \bullet \lambda^2$ les valeurs propres sont : $\lambda = 3$ et $\lambda = 0$ (double)

recherche de $E_0 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $x + y + z = 0$ $= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ / $x \in$ R et $y \in$ R$\} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$

$=x \bullet \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + y \bullet \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ d'où $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ et $\vec{V}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ E_0 est de dim 2

recherche de E_3

-2x + y + z = 0
x – 2y +z = 0
x + y – 2z = 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ 2\bullet L_2 - L_1\\ 2\bullet L_3 + L_1\end{array} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} L_3 - L_2$$

-2x + y + z = 0
-3y + 3z = 0 x = z y = z

$$= \left\{ \begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} > = \vec{V}_3$$

conclusion :

$$P = \begin{matrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ \underbrace{-1 \quad -1}_{E_0} & & \underbrace{1}_{E_3}\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} P . D$$

$D = P^{-1}\ B\ P$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

Det (C - $\lambda \bullet I$) $= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 5 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 2 \\ -\lambda & -\lambda & 2 \\ -\lambda-2 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix}_{C1+C2+C3} = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 2 \\ 0 & -\lambda+3 & 0 \\ -\lambda+2 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} L_2 - L_1$

$= (-\lambda+3) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -\lambda-2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$(-\lambda+3)[(-\lambda)(-2-\lambda)-2(-\lambda-2)] = (-\lambda+3)\bullet(\lambda^2+4\lambda+2) = (-\lambda+3)\bullet(\lambda+2)^2$

$\lambda = 3$ valeur simple

-2x –3y +2z = 0

-2x –3y +2z = 0 -2x – 3y + 2z = 0 -2x – 3y + 2x – 2y = 0 –5y = 0

5x –5y –5z = 0 x – y = z

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ valeur double $\Rightarrow$ 3x – 3y + 2x = 0 3x – 3x + 0 = 0

-2 x + 2y +2z = 0 - 2x + 2x +2z = 0 z = 0

5x –5y –0z = 0 x = y

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ problème : défini sur E de dim 1 alors que de multiplicité 2 $\Rightarrow$ dim 2 !

conclusion : dans la base $(\vec{V}_1, V_2, \vec{V}_?)$ f a pour matrice :

$$T = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{V}_{1)} & f(\vec{V}_2) & f(\vec{V}) \end{matrix} & \end{array}$$

remarques det T det C : -6 . C = 12 $\Rightarrow$ C = - 2

$$T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 ou 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{V}_{1)} & f(\vec{V}_2) & f(\vec{V}) \end{matrix} & \end{array}$$

? $\vec{V}$ représenté par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que f($\vec{V}$) = 1 . $\vec{V}_2$ -2 . $\vec{V}$

$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C + 2 I = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3x –3y + 2z = 1

-2x + 2y + 2z = 1

5x – 5y = 0 2z = 1 2z = 1 x = y indéterminé

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_1, V_2, \vec{V}_? \text{ base ?} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} L_3 - L_1$$

$\frac{1}{2} - x + x = \frac{1}{2} \neq 0$ je choisi x = 0

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$