Développement limité :

Partie régulière reste

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{X}{1!} \dots + \frac{X^{n}}{n!} + X^{n}\varepsilon(X) \quad \text{quand } Lim\varepsilon(X) \to 0$$

Le développement Limité transforme une équation en polynôme au voisinage d'un point.

3.1

f(x) + g(x) = Pn(x) + Qn(x) + $x^n\,[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)]$

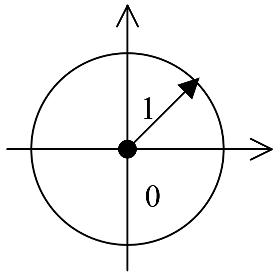
f(x) + g(x) = somme des partie régulières + $x^3\varepsilon(x)$

sinus et cosinus hyperboliques

sh x = $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ rappel : sinus circulaire : sin x = $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

ch x = $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ cosinus circulaire : cos x = $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

exponentiel réel



$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

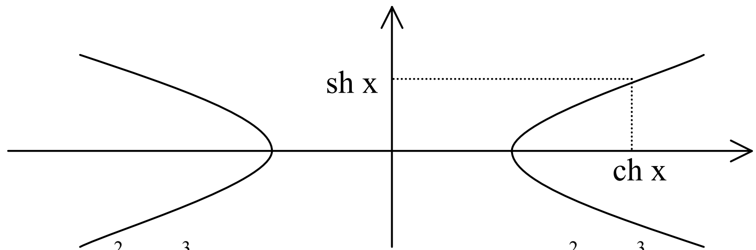
$X^2 + Y^2 = 1$

$ch^2 - sh^2 = 1$ si on considère :

$X^2 - Y^2 = 1$

$Y^2 = X^2 - 1$

$Y = \pm\sqrt{X^2 - 1}$



Ordre 3 :

$$\text{Sh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}[e^x + (-1)e^{-x}] = \frac{1}{2}([1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)] + [(-1) + 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{2x}{1!} + \frac{2x^3}{3!} + x^3\varepsilon_3(x) == \boxed{x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_4(x)}$$

produit :

f(x) X g(x) = [Pn(x) + $x^n\varepsilon_1(x)$] X [Qn(x) + $x^n\varepsilon(x)$] = Pn(x) X Qn(x) + x^n Pn(x) $\varepsilon(x)$

ex : D$L_3(0)$ de f(x) = $\sin^2 x$ (développement limité au voisinage de 0 d'ordre 3

sin x = $x - \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)$

< 3

$\boxed{\sin^2 x = x^2 + x^3\varepsilon(x)}$

sin x = $x - \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)$

D$L_3(0)$

$$\text{tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon_2(x)}$$

$\neq 0$

$x - \dfrac{x^3}{3!}$	$1 - \dfrac{x^2}{2!}$
$-x - \dfrac{x^3}{2}$	
$\dfrac{x^3}{3}$	$\boxed{x - \dfrac{x^3}{3}}$

polynôme de degré 3

exercice:

f(x) = $1+x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)$

g(x) = $2x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_2(x)$

h(x) = $x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_3(x)$

faire les développement limité à l'ordre maximum possible:

f(x) + g(x) = $1+x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)$ $+2x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_2(x)$ = $1+x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)+2x+x^2+x^2\varepsilon_2(x)$

$\boxed{\text{f(x) + g(x)} = 1+3x+2x^2+x^2\varepsilon_4(x)}$

f(x) X h(x) = [$1+x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)$] X [$x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_3(x)$]

$=x+x^2+x^2+x^2\varepsilon_4(x)=$ $\boxed{x+2x^2+x^2\varepsilon_4(x)}$

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_3(x)}{2x+x^2-x^3+x^3\varepsilon_3(x)}=\frac{x}{x}\,\frac{1+x-x^2+x^2\varepsilon_3(x)}{2+x-x^2+x^2\varepsilon_2(x)}=$$

$$\begin{array}{r|l}
1+x-x^2 & 2+x-x^2 \\ \cline{2-2}
-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2} & \\ \cline{1-1}
\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2} & \boxed{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{3x^2}{8}} \\
-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4} & \\ \cline{1-1}
-\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{4} &
\end{array}$$

si nous ne prenons pas garde à avoir un dénominateur > 0

le résultat de la division risque d'être faux :

$$\begin{array}{r|l}
x+x^2-x^3 & 2x+x^2-x^3 \\ \cline{2-2}
-(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}) & \\ \cline{1-1}
\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2} & \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{3}{8}x^2+\cancel{\frac{5x^3}{16}} \\
-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{4} & \text{FAUX !} \\ \cline{1-1}
-\frac{3x^3}{4}+\frac{x^4}{4} & \\
+\frac{3x^3}{4}+\frac{3x^4}{8}-\frac{3x^5}{8} & \\
+\frac{5x^4}{8}-\frac{3x^5}{8} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Intégration de développement limité :

DL_3(0) de f (x) = ln(1+x)

f dérivable sur]-1, +∞ [

$\forall x\in]-1,+\infty[$ f '(x) = $\frac{1}{1+x}$

On gagne un ordre : f '(x) = $\frac{1+x^2\varepsilon_1(x)}{1+x+x^2\varepsilon_2(x)}$ = 1- $x+x^2+x^2\varepsilon_3(x)$

Ln (1+x) = + constante d'intégration + x - $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_3(x)$

0

Quand $x \to 0$ ln (1+0) = ln 1 = 0

f(x) = arctang x

f dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ f '(x) = $\dfrac{1}{\underset{\neq 0}{1+x^2}} = \dfrac{1+x^2\varepsilon_1(x)}{1+x^2+x^2\varepsilon_2(x)}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1+x^2 \\ \cline{2-2} -(1+x^2) & \\ \hline -x^2 & \boxed{1-x^2} \\ -(-x^2-x^4) & \\ \hline +x^4 & \end{array}$$

f '(x) = $1-x^2+x^2\varepsilon_3(x)$

$\boxed{\text{arctang x = + (constante =0) } + x-\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)}$

D$L_4(0)$ de f(x) ln (cos x) (dérivé de ln $|x|$ = $\dfrac{1}{x}$ d(x))

$\forall x \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ f '(x) = $-\dfrac{\sin x}{\cos x}$ = -tang x = $-x-\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_1(x)$

f(x) = + (constante = 0) $-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+x^4\varepsilon(x)$ ln (cos 0) =ln 1 = 0

Composition

F: $x \longrightarrow y = f(x) \xrightarrow{g} g(x) = g[f(x)]$

$\xrightarrow{\hspace{6cm}}$ g o f

Voisinage de 0

f (x) Pn (x) + $\varepsilon_1(x)$

DL_4 (0) de f(x) ln (cos x)

Cos x = 1 - $\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_1(x)$

f(x) = ln (1 - $\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_1(x)$) voisin de 0

J'ai besoin de DL_4 (0) de ln (1 + U)

Ln (1+U) = U - $\dfrac{U^2}{2}+\dfrac{U^3}{3}-\dfrac{U^4}{4}+U^4\varepsilon_2(x)$

- $\Rightarrow$ f(x) = cos x – 1
- $\Rightarrow$ g(x) = ln (1+U)
- $\Rightarrow$ ln (cos x) = ln (1 + (cos x –1)

On remplace U par $-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$ (parti régulière d'ordre 4)

f(x) = $-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x^4}{4})+\dfrac{1}{3}(0)-\dfrac{1}{4}(0)+x^4\varepsilon(x) = -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+x^4\varepsilon(x)$

méthode :

1) Développement de la fonction intérieur
2) Remplacer et regarder le voisinage de 0

Recherche équivalence :

f(x) $\sim$ g(x) ssi lim $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ avec x $\longrightarrow$ *

*

au voisinage d'un point

Théorème :

Si $f(x) \underset{*}{\sim} g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to *} f(x) = \lim\limits_{x \to *} g(x)$

démontre $f(x) = \underbrace{\dfrac{f(x)}{g(x)}}_{\longrightarrow 1} \times g(x)$

réciproque fausse : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \end{array}\right]$ $\Rightarrow \cancel{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \neq 0}$ elle ne sont pas équivalente

Comment trouver une fonction équivalente :

polynôme $\underset{+\infty}{\sim}$ en son terme de plus haut degré

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 5 = 2x^3[1 + \frac{1}{2x} - \frac{7}{2x^2} + \frac{5}{2x^3}] \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{2x^3} = 1$$

en x = 0 $\quad f(x) \underset{0}{\sim}$ 1er terme non nul de ses développements limités

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) = x[1 - \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x)] \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1$$

terme de plus bas degré

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \underset{*}{\sim} 0 \\ \dfrac{0}{f(x)} \xrightarrow{\text{~~faux~~}} 1 \quad x \longrightarrow * \end{array}}$$

$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \cos x \underset{0}{\sim} 1$

$1 - \cos x \underset{0}{\sim} 1 - 1 - \dfrac{x^2}{2!} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2!}$

$f(x) \underset{*}{\sim} f_1(x) \qquad g(x) \underset{*}{\sim} f_1(x) \qquad g(x) \underset{*}{\sim} g_1(x)$

soustraction

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x(1 - \cos x)}$$

multiplication

$\left.\begin{array}{l} x \underset{0}{\sim} x \end{array}\right\}$ $x(1 - \cos x) \sim x \cdot \dfrac{x^2}{2}$

$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x}$ **0**

sin x = $x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)$

cos x = $1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_2(x)$

x . cos x = $x - \frac{x^3}{2!} + x^3\varepsilon_2(x)$

sin x – x cos x = $+\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{x \times \frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{2}{3}}$$