

# TP 4 : Analyse éléments finis



**UNIVERSITE PARIS X NANTERRE**

*Dans ce TP, on vous propose d'utiliser le module de calcul par éléments finis de Catia V5. Les exercices proposés sont volontairement placés dans un ordre croissant de difficulté. Le premier exercice porte sur l'étude d'une structure 3D. Le second exercice porte sur la comparaison de modèles 1D et 3D d'une structure de type treillis. Un troisième exercice permet d'étudier différentes connexions possibles entre les faces planes de deux solides. Le dernier exemple permet l'étude complète d'un assemblage boulonné et préchargé.*

---

# 1 Méthode des éléments finis

La conception d'un produit industriel passe par une phase de tests permettant de déterminer sa tenue en service face à son environnement. Dans le domaine de la mécanique, et dans les exemples les plus simples, l'environnement peut être modélisé par des efforts imposés, des déplacements imposés, des conditions de contact, etc... Une fois que cette première modélisation est effectuée, on peut écrire un certain nombre d'équations (plus ou moins fiables) régissant le comportement du milieu continu dans son environnement. L'ensemble de ces équations forme le problème de mécanique des milieux continus, problème que l'on cherche à résoudre pour connaître, à terme, les contraintes et déplacements dans tout le milieu.

Malheureusement, dans la très grande majorité des cas, il est impossible de donner une expression analytique de la solution du problème, même dans les cas standard où l'on peut démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

C'est pour cette raison que des méthodes numériques, permettant de fournir à l'ingénieur une solution approchée du problème de mécanique des milieux continus, ont été proposées. Parmi elles, la méthode des éléments finis est la plus utilisée actuellement dans l'industrie.

Avant d'aborder ce TP, il faut donc garder à l'esprit deux points essentiels :

- Le problème de mécanique des milieux continus est un modèle très imparfait de la réalité. La géométrie du produit est généralement approchée, son environnement réel en service est souvent difficile à maîtriser et les conditions aux limites du problème sont donc floues. Enfin, son comportement matériau est identifié sur un échantillon, mais il est souvent simplifié à l'extrême pour ne tenir compte que des phénomènes les plus criants.
- La solution obtenue par éléments finis n'est qu'une solution approchée du problème de mécanique des milieux continus.

Il est donc primordial de toujours rester critique face aux résultats obtenus.

## 2 Etude d'une plaque trouée

### 2.1 Le problème posé

On considère pour commencer un problème classique de mécanique des milieux continus. Il s'agit d'une plaque trouée sollicitée en traction. La géométrie, le chargement, et les conditions aux limites sont définies par la figure 1.

### 2.2 Préliminaires

La solution est-elle unique ? La géométrie, le chargement, les conditions aux limites, et donc le problème tout entier sont symétriques par rapport aux deux axes  $(0, \vec{x})$  et  $(0, \vec{y})$ . Quel nouveau problème cela revient-il à traiter. La solution du nouveau problème est elle unique ?

### 2.3 Création des liaisons

Il faut maintenant créer les conditions aux limites représentant les symétries identifiées précédemment. Les imposer à l'aide des outils à disposition :

- encastrement ;
- patins ;
- personnalisée...

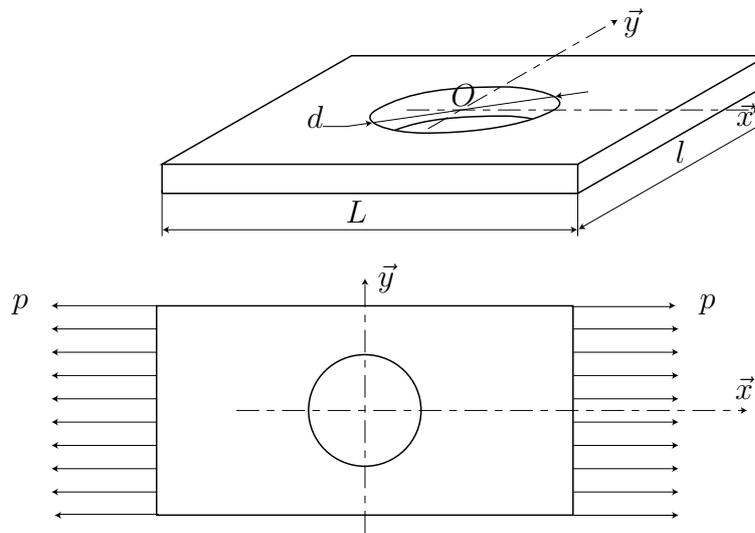


FIG. 1 – Le problème de la plaque trouée

## 2.4 Création des efforts imposés

On appliquera une pression négative, afin d'obtenir un effet de traction dans la plaque, sur un des côtés de la plaque. Eventuellement, on pourra tester (et critiquer par la suite) une autre manière d'appliquer un chargement à l'aide de l'outil nommé force répartie.

## 2.5 Calcul

Lancer le calcul. On demande alors de renseigner quelle est l'analyse statique qui doit être calculée, au cas où il y en aurait plusieurs. A ce stade, il est également possible de ne faire que le calcul du maillage.

## 2.6 Post traitement

Une fois le calcul terminé, il est alors possible de calculer les contraintes et de les tracer (par défaut la contrainte équivalente de Von Mises), selon différents formats de représentation (courbes de niveau ou valeurs par éléments lissées).

Depuis peu, il est également possible d'obtenir les valeurs des composantes du tenseur des contraintes. Après analyse des conditions au limites au bord du trou, commenter les valeurs obtenues pour  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . Faire de même sur le bord où est imposée la pression (ou la force répartie).

### 3 Etude d'un treillis rigide

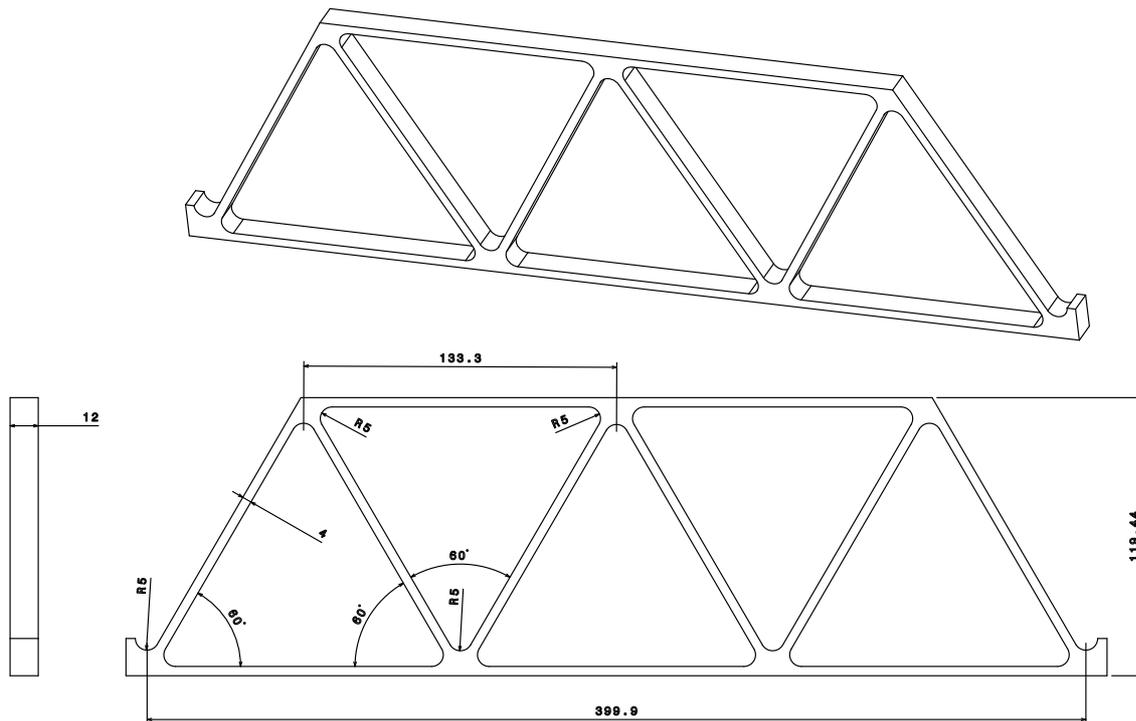


FIG. 2 – Dessin de définition du treillis rigide

#### 3.1 Modèle tridimensionnel

Dessiner le treillis comme un nouvelle pièce et faire une analyse éléments finis. Le treillis sera globalement chargé en traction. La charge sera appliquée sur le congé de raccordement situé entre les barres (5) et (7) et sa résultante sera prise égale à 1000  $N$ . Les déplacements seront imposés sur les portions de cylindre en  $A$  et  $G$ . On fera en sorte que les points  $A$  et  $G$  soient immobiles dans la direction de la charge, par contre ils doivent pouvoir se rapprocher. Dans toute la suite, on prendra soin de se conformer à la numérotation des nœuds et des barres définie par la figure 3.

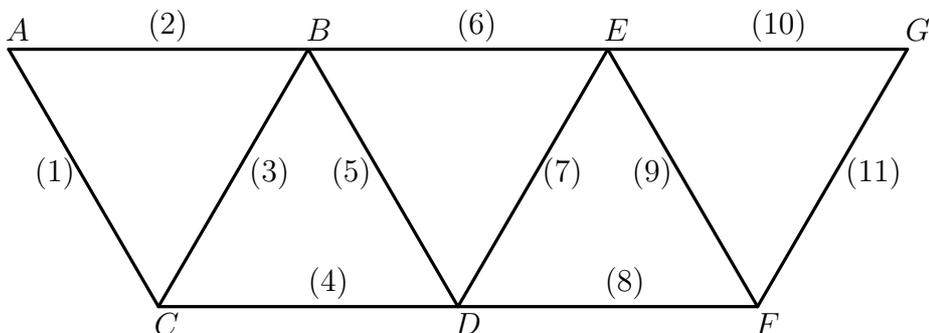


FIG. 3 – Repérage des nœuds et barres

## 3.2 Assemblage de poutres

### 3.2.1 Création de la géométrie d'une poutre

On souhaite maintenant modéliser le treillis par un assemblage de poutres liées rigidement entre elles. Concevoir une poutre représentant un côté d'un triangle équilatéral dans l'atelier WireFrame :

- Point initial (0; 0; 0) ;
- Point final (133, 3; 0; 0).

Cacher les points qui ont été définis pour tracer le segment afin de découvrir les petites sphères noires représentant les extrémités de la poutre. Définir enfin un point extérieur à la poutre, par exemple de coordonnées (66, 65; 50; 0).

Appliquer enfin un matériau (Aluminium) à l'élément linéique et non pas au corps de pièce puis sauver la pièce ainsi créée.

### 3.2.2 Création du treillis

Lancer ensuite l'atelier AssemblyDesign. Insérer une par une les 11 poutres du type de celle définie précédemment et les assembler à l'aide de l'outil coïncidence pour obtenir finalement le treillis. Il faut toutefois prendre garde au fait que le treillis peut ne pas rester plan si l'on n'y prend pas garde !

### 3.2.3 Lancement du calcul

Lancer enfin le module d'analyse par éléments finis. Commencer par mailler les poutres une par une. Chaque maillage apparaît dans l'arbre de construction.

Ensuite, appliquer des sections rectangulaires (Cf dessin de définition de la figure 2) grâce à l'outil « Beam Property ». On demande d'abord de sélectionner la poutre, puis sa forme de section. L'icône représentant une clé permet de préciser les dimensions selon les axes locaux (nulles par défaut, ce qui conduit à des erreurs par la suite si on les oublie). Ces derniers sont définis grâce au point extérieur à la poutre défini dans l'atelier WireFrame.

Les liaisons au bâti peuvent être appliquées de la même manière qu'en 3D. Par contre, il faut désormais imposer des liaisons entre les poutres. On choisira une liaison de type personnalisée (rigide-rigide-rigide) appliquée à chacune des 15 contraintes de coïncidence de l'arbre de construction. Imposer enfin un effort de type « force répartie », d'intensité 1000  $N$  sur le nœud adéquat.

Lancer le calcul et observer l'allure de la déformée.

Comparer éventuellement le déplacement obtenu au point de chargement dans la direction de la charge, à celui obtenu en 3D. On pourra également calculer la déformation (et donc la contrainte) sur une ou plusieurs poutres.

## 3.3 Etude analytique du treillis articulé

On considère le même treillis, mais cette fois on suppose que les liaisons entre les barres sont des articulations. Le calcul analytique des sollicitations dans chaque barre est ainsi très simple à réaliser.

Comment les barres du treillis sont-elles sollicitées ?

On choisit la convention suivante : les efforts des barres sur un nœud sont dirigés du centre de ce nœud vers l'extérieur, comme indiqué sur la figure 4.

Si l'effort obtenu après résolution est positif, la barre sera donc sollicitée en traction et inversement. On note  $N_\alpha$  l'effort dans la barre ( $\alpha$ ).

- Isoler le treillis tout entier. On note  $\vec{F}$  l'effort imposé au point  $D$ . Déterminer les actions dans les liaisons avec le bâti aux points  $A$  et  $G$  en fonction de  $F = \|\vec{F}\|$ .
- Isoler le nœud  $A$ . Faire un schéma représentant les actions mécaniques supportées par ce nœud. En déduire les valeurs algébriques des efforts  $N_1$  et  $N_2$ .
- Isoler le nœud  $C$ . Faire un schéma représentant les actions mécaniques supportées par ce nœud. En déduire les valeurs algébriques des efforts  $N_3$  et  $N_4$ .
- Isoler le nœud  $B$ . Faire un schéma représentant les actions mécaniques supportées par ce nœud. En déduire les valeurs algébriques des efforts  $N_5$  et  $N_6$ .
- Comparer les valeurs obtenues avec celles tirées des analyses éléments finis.
- Quelle conclusion tirez-vous sur la validité du treillis articulé en tant que modèle du treillis rigide tridimensionnel ?

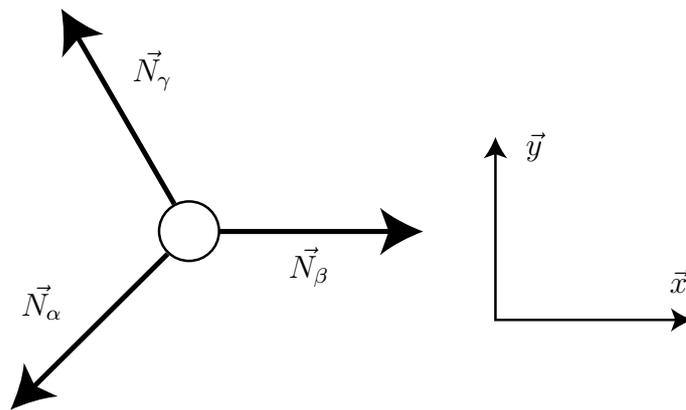


FIG. 4 – Convention sur les efforts dans les barres et repère

### 3.4 Comparaison des résultats

Comparer les différents résultats obtenus en terme de contraintes normales dans les poutres. Le modèle de treillis articulé est-il un bon modèle du treillis 3D ?

## 4 Liaison entre deux pièces

Il est également possible de faire une analyse éléments finis d'un assemblage. Pour cela, en plus des conditions aux limites à imposer avec le bâti, il nous faut imposer des contraintes entre les solides.

Dans cette partie, nous allons illustrer le comportement de quelques-unes de ces liaisons sur un exemple simple détaillé sur la figure 5.

Pour les trois types de liaisons envisagées, le pavé supérieur sera chargé en compression selon les trois axes. Les valeurs des efforts imposés seront conservées pour les différents cas.

#### 4.1 Encastrement entre les deux solides

Imposer les conditions de liaisons entre les deux faces en contact de sorte qu'aucun mouvement relatif ne soit autorisé entre deux points en vis à vis de chacune des surfaces.

Imposer les conditions de liaisons entre le pavé inférieur et le bâti, en tenant compte de la double symétrie du problème.

Faire le calcul.

#### 4.2 Liaison glissière

On souhaite maintenant autoriser le glissement relatif des deux solides dans leur plan tangent commun. Imposer donc une nouvelle liaison.

On conserve naturellement les mêmes liaisons entre le pavé inférieur et le bâti.

Faire le calcul.

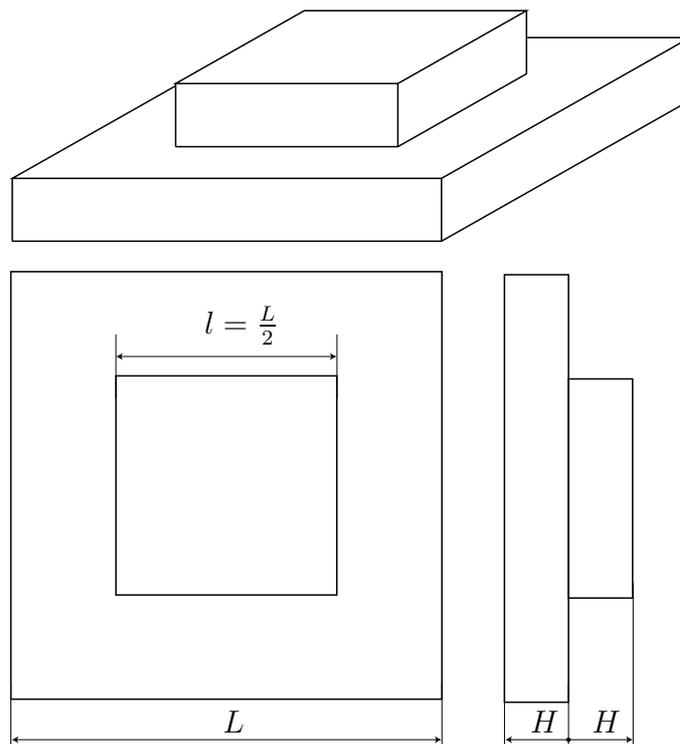


FIG. 5 – Problème avec liaison entre solides

#### 4.3 Contact entre les deux solides

On souhaite maintenant autoriser à la fois le glissement relatif dans le plan tangent commun, mais également le décollement du pavé supérieur par rapport au pavé inférieur. Le problème posé n'est cette fois plus linéaire. Imposer une telle liaison dite de contact.

Faire le calcul.

## 4.4 Comparaison des résultats

Comparer les différentes sollicitations auxquelles est soumis le solide inférieur.

## 5 Etude d'un assemblage boulonné



FIG. 6 – Photo du banc de travaux pratiques

### 5.1 Motivations

Considérons une culasse montée sur un bloc-cylindres dans un moteur classique à 2 ou 4 temps. Cette culasse est maintenue plaquée contre la face supérieure du bloc-cylindres à l'aide de nombreux éléments filetés. Il est clair, qu'en fonctionnement, sous l'effet de la pression dans les cylindres, la culasse tend à se « décoller » du bloc-cylindre. Il faut donc placer des vis adaptées, en nombre suffisant, et de façon réfléchie, de sorte qu'aucun jeu néfaste au taux de compression n'apparaisse au niveau du plan de joint. La question suivante peut être posée : le plan de contact entre chacune des vis et la culasse doit-il être proche du plan de joint ou éloigné ? Par exemple sur le compresseur proposé figure 7, vaut-il mieux utiliser la solution de gauche où le plan de contact entre la tête de vis et la culasse est très éloignée du plan de joint, ou, au contraire, la solution de droite ?

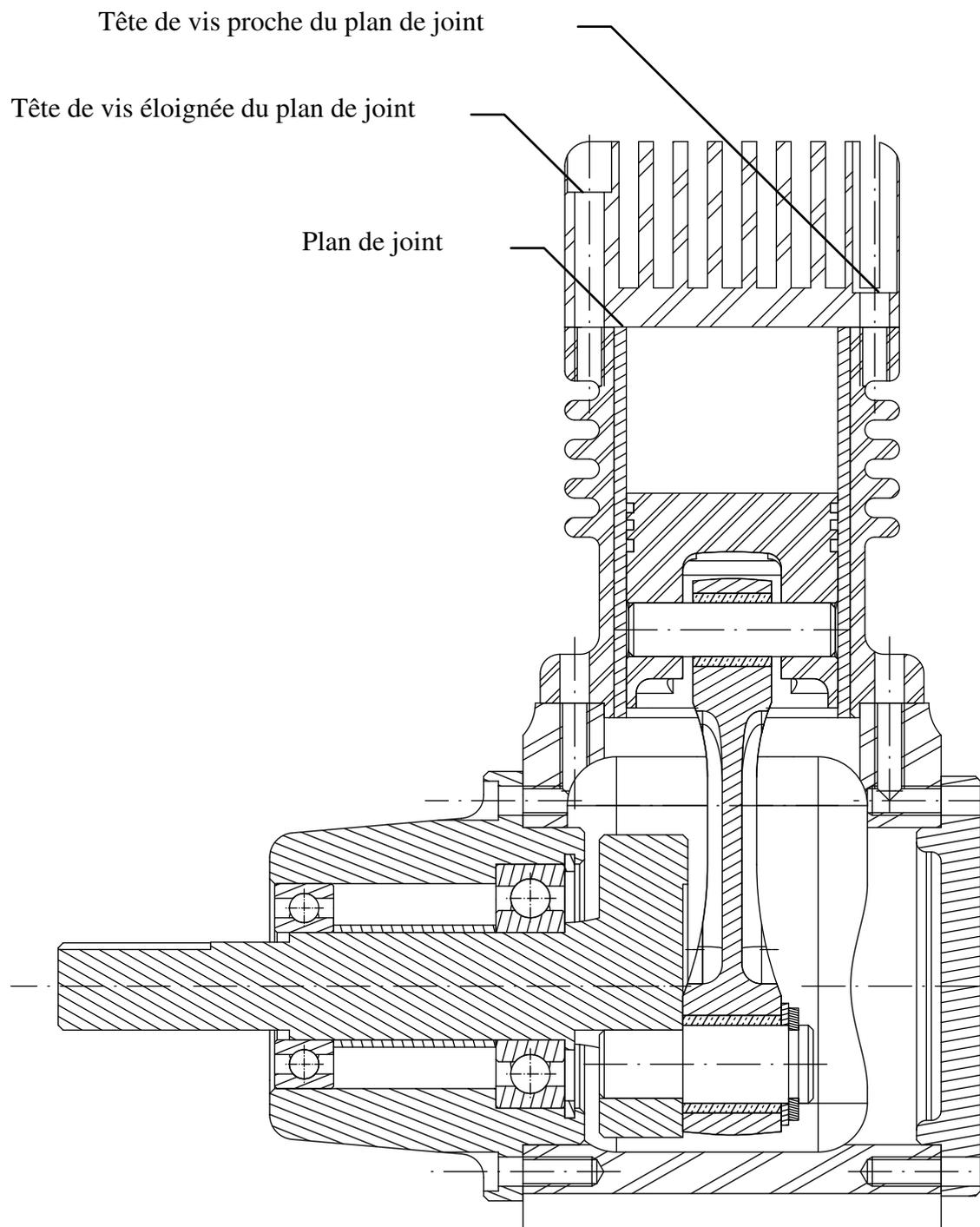


FIG. 7 – Exemple du compresseur

## 5.2 Résultats analytiques et expérimentaux

Un banc d'essai classique permet d'étudier ce problème. Il est constitué d'une tige filetée dont une extrémité est vissée dans le bâti (solidaire de la table). A l'aide de cette tige filetée, on vient serrer contre le bâti une pièce creuse, en aluminium, axisymétrique et munie de plusieurs collerettes. Dans la suite, cette pièce est dénommée « tube » et sa géométrie est définie figure 10. Les collerettes permettent d'exercer des efforts extérieurs sur l'assemblage à différentes distances du plan de contact entre le tube et la tête de vis. Les efforts sont appliqués grâce à un vérin hydraulique commandé par une pompe manuelle. A l'aide d'une jauge de déformation, on mesure la déformation axiale dans la partie basse du tube (en un point d'altitude inférieure à  $c$ ). Lorsque le tube se décolle du bâti, la déformation axiale s'annule. On a représenté sur la figure 8 les évolutions de cette déformation axiale mesurée en fonction de l'effort extérieur, pour différentes précharges, et pour chaque plan de chargement. On pourra remarquer que la déformation axiale du tube n'atteint jamais une valeur nulle. Cela provient tout simplement du fait qu'il n'est plus possible d'équilibrer le pont au début de l'expérience sur la banc d'essai.

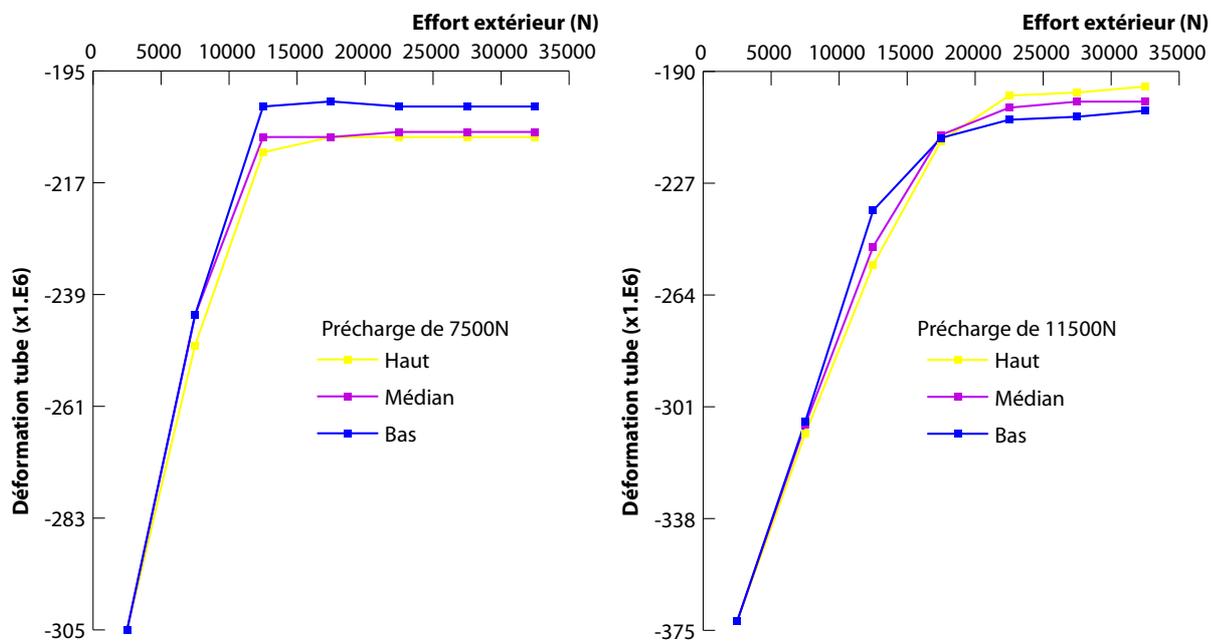


FIG. 8 – Déformation axiale mesurée

Une étude théorique de cet assemblage permet d'obtenir les courbes données sur la figure 9. Elle montrent un comportement tout à fait similaire.

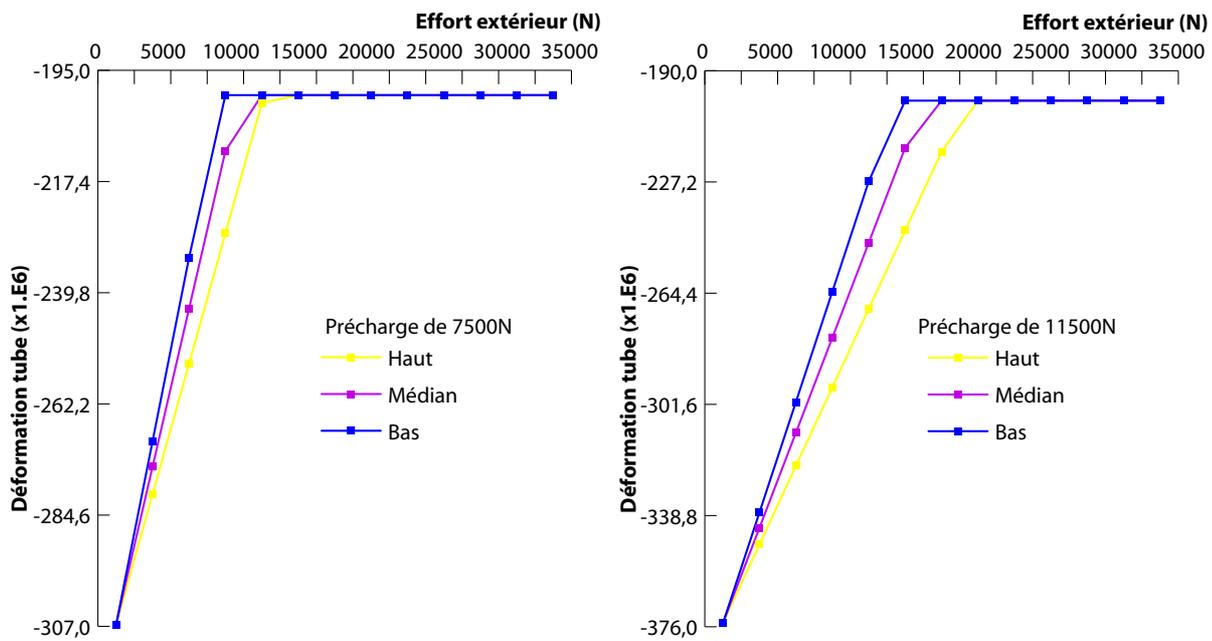


FIG. 9 – Déformation axiale calculée analytiquement

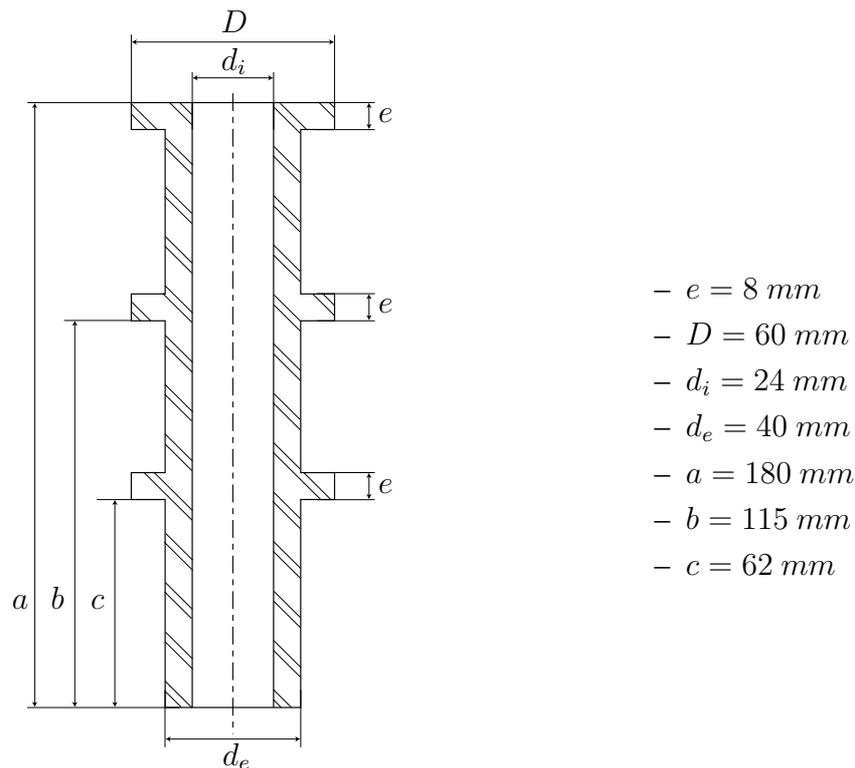


FIG. 10 – Géométrie du tube

### 5.3 Commentaires

On constate tout d'abord qu'augmenter la précharge permet d'augmenter la raideur de l'assemblage, c'est à dire de retarder le moment où il y a décollement. Ce résultat était bien sûr attendu. Pour une précharge donnée, on constate que l'effort extérieur critique à partir duquel il

y a décollement entre le tube et le socle augmente lorsque le plan de chargement se rapproche du plan de contact entre la tête de vis et le tube. En conclusion, on peut donc dire qu'il est préférable de noyer les têtes de vis dans la culasse.

## 5.4 Travail demandé

On se propose ici de simuler par élément finis, dans Catia V5, le comportement de cet assemblage boulonné, préchargé, puis soumis à des efforts extérieurs et de retrouver les résultats obtenus précédemment.

### 5.4.1 Création des différentes pièces

Il faut tout d'abord commencer par créer les différentes pièces constituant l'assemblage boulonné, à savoir :

- Le tube en aluminium défini par la figure 10 ;
- La tige filetée définie par la figure 11 ;
- Le socle défini par la figure 12 ;
- L'écrou standard (M16) pourra être trouvé dans la bibliothèque de Catia V5 ;
- La rondelle en acier intercalée entre l'écrou et le tube (diamètre intérieur 16 mm, diamètre extérieur 40 mm, épaisseur 8 mm).

Etant données la symétrie de révolution de l'assemblage complet, on n'étudiera qu'un secteur angulaire de la structure. Plus précisément on choisit de définir seulement les trois quarts de la structure. Il faut donc définir les pièces en conséquence.

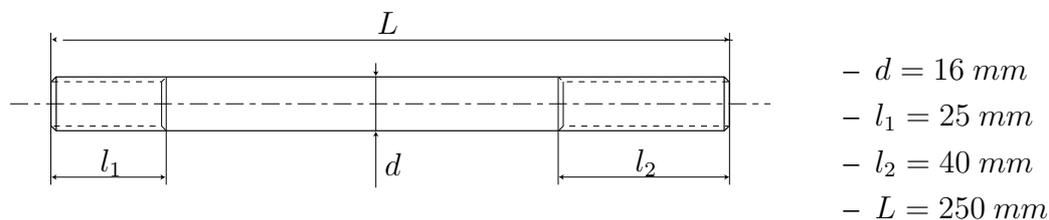


FIG. 11 – Géométrie de la tige filetée

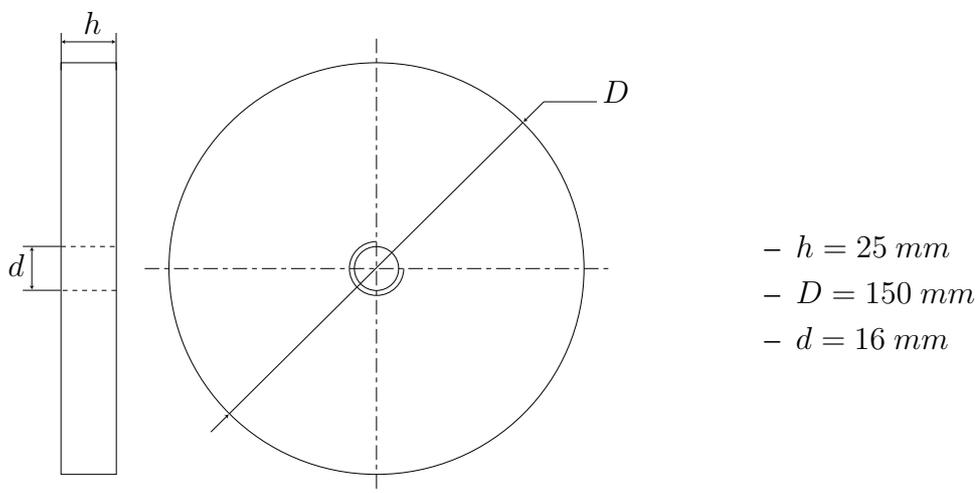


FIG. 12 – Géométrie du socle

### 5.4.2 Assemblage des pièces

La deuxième étape consiste à assembler les différentes pièces. Le socle sera tout d'abord fixé au bâti. On peut ensuite insérer la tige filetée et imposer une contrainte de coïncidence entre son axe et celui du trou taraudé du socle. Il doit également y avoir coïncidence entre les faces inférieures de ces deux solides.

Il faut ensuite insérer le tube et imposer, notamment le contact entre sa face inférieure et la face supérieure du socle.

Il reste enfin à insérer la rondelle et l'écrou. Là encore il est nécessaire d'imposer des conditions de contact. Il ne faut pas omettre la coïncidence entre les axes de la tige filetée et de l'écrou.

### 5.4.3 Calcul éléments finis

Les préparatifs du calcul éléments finis se découpe en trois phases :

- Création des conditions aux limites de type déplacement avec le bâti ;
- Création des conditions de connexion entre les pièces ;
- Création des efforts imposés sur l'une des trois collerettes.

**Conditions aux limites** Les liaisons avec le bâti sont théoriquement concentrées au niveau du socle. On peut par exemple encasturer sa face inférieure.

Puisque l'on étudie seulement un secteur angulaire de la structure, il faut également imposer les conditions en déplacement sur les « plans de coupe ».

**Conditions de connexion** Par rapport à un calcul éléments finis classique, la présence de plusieurs solides nécessite d'imposer des conditions de connexion entre ceux-ci. Le logiciel Catia V5 permet, entre autres, d'imposer les deux types de connexion suivants.

- Des conditions de contact (sans frottement) entre deux surfaces planes. Pour cette liaison, il est nécessaire de sélectionner la contrainte de coïncidence entre les deux plans en contact dans l'arbre de construction. On peut éventuellement préciser le jeu si celui-ci est non nul.
- Des conditions de serrage d'assemblages vissés. il faut alors sélectionner la contrainte de coïncidence entre les pièces qui jouent le rôle d'écrou et de vis. On peut imposer une précharge (effort en Newton).

Dans notre problème, il faut imposer des conditions de contact entre :

- Le tube et le socle ;
- Le tube et la rondelle ;
- La rondelle et l'écrou.

Il faut également imposer une liaison de type serrage entre :

- L'écrou et la tige filetée avec une précharge théorique de  $7500\text{ N}$  ou  $11500\text{ N}$ . En pratique, puisque l'on n'a considéré que les trois quarts de la structure, il faut multiplier cette valeur de précharge par  $\frac{3}{4}$ .
- Le socle et la tige filetée avec une précharge nulle.

**Effort extérieur imposé** Il s'agit de l'effort extérieur appliqué par l'intermédiaire du vérin, successivement sur l'une des trois collerettes du tube. Cet effort extérieur est distribué sur toute cette collerette. Il s'agit donc d'une pression uniforme. La valeur de la pression imposée dépend de :

- La valeur de pression dans le vérin qui varie de 0 MPa à 60 MPa de 5 MPa en 5 MPa ;
- La sections du vérin :  $S_v = 530 \text{ mm}^2$  ;
- La section de la collerette :  $S_c = \Pi(D^2 - d_e^2)/4$ .

#### 5.4.4 Résultats

La grandeur intéressante pour décrire l'état du contact (collé ou décollé) entre le socle et le tube est la résultante des efforts dans la liaison. En effet cette résultante s'annule lorsqu'il y a décollement. Pour obtenir cette valeur, une fois que le calcul a été effectué, il faut cliquer à l'aide du bouton droit sur l'objet « capteurs » de l'arbre et sélectionner « calcul des réactions ». Une fenêtre s'ouvre alors et l'on peut spécifier la liaison de type contact entre le socle et le tube. Pour obtenir la valeur de cette réaction, il suffit alors de cliquer à l'aide du bouton droit de la souris sur l'objet ainsi créé dans l'arbre. Puisque l'on n'a considéré que les trois quarts de la structure, il est nécessaire de multiplier cette valeur par  $\frac{4}{3}$  pour obtenir le véritable effort de contact pour la structure complète.

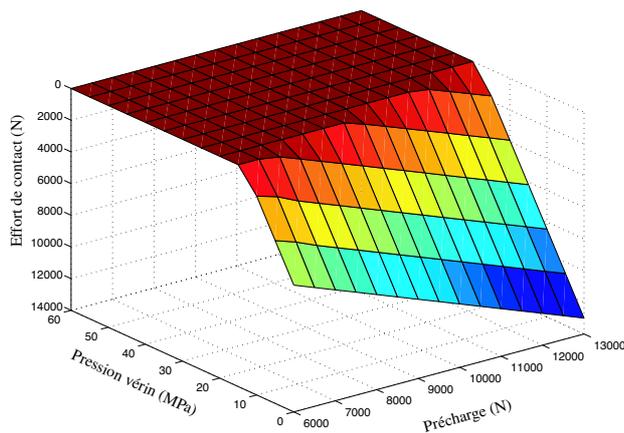


FIG. 13 – Plan bas

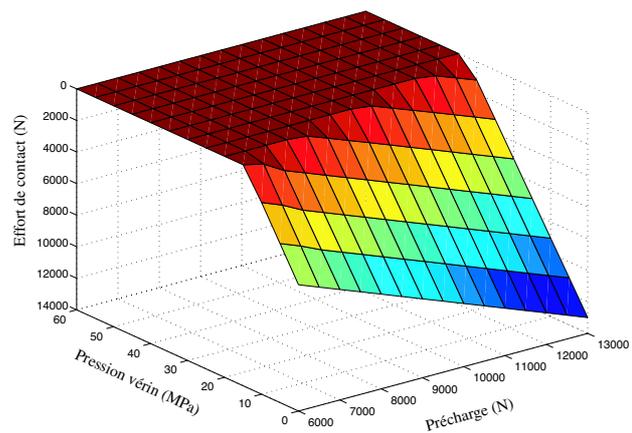


FIG. 14 – Plan médian

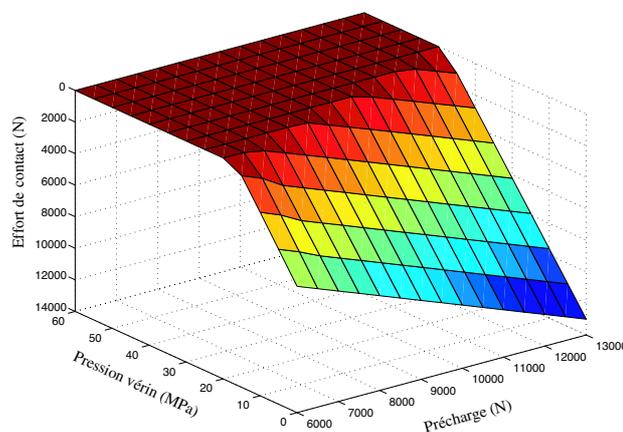


FIG. 15 – Plan haut

Pour différentes précharges (de 6000  $N$  à 12000  $N$ ), pour des pressions dans le vérin allant de 0  $Mpa$  à 60  $MPa$ , et pour les trois plans de chargement possibles on obtient les trois surfaces des figures 13, 14, 15.

On retrouve un certain nombre de résultats attendus :

- Lorsque l'effort extérieur est nul, c'est à dire lorsque la pression dans le vérin est nulle, l'effort de contact est égal à la précharge imposée ;
- A précharge donnée, avant le décollement, la variation de l'effort de contact varie linéairement en fonction de la pression dans le vérin ;
- Augmenter la précharge permet d'augmenter l'effort extérieur à partir duquel il y a décollement ;
- Pour une précharge donnée, rapprocher le plan de chargement du plan de contact entre écrou et tube permet d'augmenter l'effort limite à partir duquel il y a décollement.